

SCIENCE EN AUVERGNE

BULLETIN DE L'ADASTA

N° 11-12

Octobre - Novembre - Décembre 1989

20 F

**LES COULEURS
DE L'INVISIBLE**



Journée Paul Langevin en Auvergne : les mathématiques

ASSOCIATION POUR LE DEVELOPPEMENT DE L'ANIMATION SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE EN AUVERGNE

SOMMAIRE

- **Le dossier :**
Les couleurs de l'invisible
 par Michel Henry 3
- **Ecologie :**
 Pollution de l'air
 et effet de serre
 par Christian Elichegaray 9
- **Histoire des sciences :**
 Chronique de l'année 1889
 par Roland Jouanisson 11
- **Expériences pour tous**
 Comment réaliser des figures
 de diffraction
 par Roland Jouanisson 12
- **Visites, stages, conférences** 15
 - Nouvelle visite de l'usine Roussel-Uclaf de Vertolaye
 - Activités de la section astronomie.
- **Informations régionales** 16
 - Premières journées scientifiques et techniques de la ville d'Issoire
 - XI^e atelier européen d'analyse cytogénétique
 - Images de la recherche en Auvergne
- **Journée Langevin 1989 :**
 La recherche en mathématiques
 à l'université Blaise-Pascal
 par M. Guillaume, P.L. Hennequin,
 et A. Quilliot.

Assemblée Générale de l'ADASTA

L'Assemblée Générale de l'ADASTA aura lieu le mardi 19 décembre à 18 heures à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie, aux Cézeaux, 24, avenue des Landais à Aubière.

Tous les adhérents à jour de leur cotisation 1989 sont invités à y participer.

L'ADASTA a reçu en 1989 le soutien financier

- de la Délégation à l'Information Scientifique et Technique (Ministère de la Recherche et de la Technologie)
- du Conseil Régional d'Auvergne
- de la Direction Régionale des Affaires Culturelles (Ministère de la Culture et de la Communication)
- du Palais de la Découverte.

Photographie de la couverture :

A l'aide de trois sources de lumière colorée (rouge, verte et bleue), il est possible d'obtenir n'importe quelle couleur par synthèse "additive" trichrome. Dans le cas présent, la composition des différentes couleurs s'effectue en fonction de l'orientation des faces du polyèdre (icosaèdre étoilé) par rapport aux trois sources.

(photo : R. JOUANISSON)

Le 11^e numéro d'Auvergne-Sciences paraît au moment où se déroulent les Etats Généraux de la Culture Scientifique, Technique et Industrielle. Cette manifestation à laquelle les promoteurs ont conféré un caractère à la fois régional et national se terminera par un important colloque à la cité des Sciences et de l'Industrie à Paris les 4, 5 et 6 décembre prochains. Il sera le point d'orgue des diverses manifestations et journées de réflexion tenues dans toutes les régions françaises et aura, entre autres objectifs, celui de "renforcer le dialogue entre le monde scientifique et le grand public et d'élargir à de nouveaux partenaires : élus, responsables d'entreprises, etc..., le cercle des acteurs qui œuvrent dans le domaine de la culture scientifique".

Les dirigeants et les membres de l'ADASTA ne peuvent que se réjouir d'une telle initiative car elle nous apparaît comme la reconnaissance du bien-fondé de notre association et de l'incontestable utilité des actions que nous avons menées depuis maintenant bientôt 4 ans dans notre ville, notre région et même au-delà.

"Renforcer le dialogue entre le monde scientifique et le grand public" : les nombreuses conférences que nous avons organisées chaque année sur des thèmes porteurs pour notre région ou autour des grandes expositions que nous avons présentées avaient bien pour objet de diffuser au plus grand nombre, et particulièrement à notre jeunesse, la culture scientifique. Il en est de même pour les visites que nous avons organisées dans les grands centres de recherche comme le CERN à Genève, ou dans les grandes entreprises de notre région : Michelin, Roussel-Uclaf, Rhône-Poulenc, MSD Chibret, EDF, Verdôme, Eaux de Volvic, etc...

"Elargir à de nouveaux partenaires le cercle des acteurs qui œuvrent dans le domaine de la culture scientifique et technique" : dans toutes les actions que nous avons conduites nous nous sommes efforcés d'associer les collectivités locales et leurs élus, (citons, par exemple, la brillante exposition sur l'œuvre de l'Institut Pasteur réalisée en symbiose avec la ville de Clermont-Ferrand).

"Savoir, Education, Loisirs" : ces trois mots ont guidé l'action de notre équipe pédagogique aussi bien dans le cadre de nos universités d'été que dans la réalisation de matériel pédagogique et de documents pour l'enseignement des Sciences Physiques dans les lycées et collèges, ou dans notre participation à de nombreuses actions éducatives en collaboration étroite avec la Mission Académique à la Formation des Personnels de l'Education Nationale. Ajoutons que ces trois mots ont constamment guidé, cela va de soi, l'équipe de rédaction de notre revue "Auvergne Sciences".

L'objet de notre propos n'est certainement pas de manifester des sentiments d'auto-satisfaction ; il reste tant à faire pour l'animation et la diffusion de la culture scientifique et technique que ce serait d'évidence ridicule. Nous avons simplement souhaité montrer par un bref rappel de l'activité de notre association que le travail acharné et l'enthousiasme d'une petite équipe avaient contribué, parmi d'autres, mais pour une part honorable, à faire que la diffusion de la Culture Scientifique et Technique en Auvergne ne soit pas lettre morte.

Mais dans ce domaine l'œuvre est loin d'être achevée, aussi nous permettrons-nous de suggérer à nos élus, aux collectivités locales, aux Universités et Ecoles, et à tous ceux qui s'intéressent à la diffusion de la culture, de réfléchir à la création, en Auvergne, à l'image de ce qui existe dans plusieurs régions, d'un véritable Centre Culturel Scientifique et Technique doté de moyens adaptés aux besoins.

Pour notre part, c'est bien volontiers que nous mettrons à la disposition de la communauté notre expérience et notre savoir-faire...

R. VESSIERE
R. JOUANISSON

Auvergne-Sciences : publication trimestrielle**Adhésions et Abonnements :**

Adhésion à titre individuel	100 F
Adhésion à titre collectif	500 F
Membre bienfaiteur	1000 F (au moins)

L'adhésion donne droit au service gratuit du bulletin et à des réductions sur les différents services rendus par l'Association (publications, stages, visites,...).

Adressez le courrier à ADASTA, B.P. 45, 63177 Aubière Cedex.

Directeur de la Publication : Roger VESSIERE
Rédaction : Roland JOUANISSON

Bulletin trimestriel – Abonnement : 100 F par an
Edité par ADASTA – Complexe des Cézeaux
63177 AUBIERE CEDEX – Tél. 73 40 72 26

LES COULEURS DE L'INVISIBLE

par Michel Henry*

D'une longue lignée d'ancêtres hantant les forêts équatoriales, l'homme a reçu un merveilleux cadeau, la vision des couleurs. Assez souvent, celles-ci sont dues à des pigments, mais d'autres mécanismes les font apparaître dans des structures habituellement incolores. Ainsi pour ne citer que les principaux, la diffusion, les interférences voire la simple réfraction font naître les couleurs de l'invisible. Qui plus est, tout un chacun qui veut bien ouvrir les yeux au spectacle de la nature peut les observer quotidiennement.

"Il jette l'animal sur la table,
Une belle baleine aux yeux bleus".

J. Prévert

I - DES COULEURS

Tout-à-fait entre nous, j'ignore s'il existe vraiment des baleines aux yeux bleus, mais après tout, pourquoi pas ?

Qu'ont les yeux bleus de si particulier ? Un pigment, dites-vous ? Eh bien non : c'est un exemple entre mille de ce que j'appelle les «couleurs de l'invisible», les couleurs qui apparaissent dans des objets transparents.

Tant qu'à nous poser des questions, commençons par la première de toutes : qu'est-ce que la couleur ?

A l'origine, c'est une qualité particulière que nous attachons aux objets, et qui nous permet de les distinguer, ainsi un fruit mûr d'un fruit non encore consommable.

Selon le Pr Guiart, du Musée de l'Homme, les peuplades «primitives» n'ont pas de nom spécifique pour désigner les couleurs : le même mot désigne le charbon et le noir, la mer et le bleu... Il existe d'ailleurs chez nous des survivances, ainsi lilas ou orange ; il est curieux de noter, pour ce dernier exemple, qu'orange (nom de couleur) apparaît dans la langue française au XVII^e siècle, bien après que les Européens eurent découvert le fruit du Moyen-Orient, lors des croisades. Dans les chroniques antérieures, et aussi dans le langage héraldique, la couleur est appelée «aurore».

Cette qualité étant attachée à la vision, il est naturel de la rapporter au messager qui nous transmet cette information, la lumière.

Pour le physicien, la couleur n'existe pas : il n'y a rien dans la lumière que nous puissions étiqueter «violet» ou «jaune», au point que d'aucuns ont proposé de baptiser «érytrogène» ou «cérurogène» ce que tout un chacun nomme rouge ou bleu, pour bien marquer la différence entre le phénomène physique, la lumière, et la sensation physiologique ou psychologique qui en résulte.

Ne soyons pas plus pédants que Trissotin, et conservons nos bonnes vieilles habitudes : vous auriez du mal à convaincre quiconque a eu l'occasion de voir fonctionner un laser helium-néon que cet appareil n'émet pas de la lumière rouge.

II - INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA COULEUR

Soit. Mais alors, qu'est-ce qui, dans la lumière fait naître la sensation colorée ? Cette fois, nous pouvons apporter les premiers éléments de réponse.

Nous nous représentons la lumière comme une onde, comme une ride à la surface de l'eau. Mis en présence d'une lumière quelconque, nous savons la «démonter», la décomposer – un peu comme un mélomane averti isole à l'oreille, dans une symphonie, les instruments de l'orchestre – en éléments que nous jugeons plus simples. Nous les nommons ondes monochromatiques et les caractérisons par leur longueur d'onde : de l'ordre d'un demi-millième de millimètre (μm) pour les ondes auxquelles est sensible l'œil.

Nous savons aussi produire directement de telles ondes, par exemple à l'aide d'un laser : ainsi, la lumière émise par le laser hélium-néon dont nous parlions tout à l'heure a pour longueur d'onde 0,6328 μm .

Le point important est que chaque onde monochromatique produit une sensation colorée particulière, du violet pour les plus courtes longueurs d'onde (0,4 μm) au rouge pour les plus grandes (0,8 μm) en passant par toutes les nuances de l'arc-en-ciel. Qui plus est cette sensation est directement liée à la longueur d'onde : si nous savons qu'une radiation est monochromatique et si nous voyons qu'elle est jaune, alors nous savons qu'elle est associée à une longueur d'onde de l'ordre de 0,55 μm .

Mélangeons plusieurs ondes monochromatiques. Il en résulte une nouvelle sensation colorée, dont la nuance dépend des constituants du mélange et de leur proportion rela-

tive : l'association du bleu et du rouge donne toute la gamme des pourpres, du magenta au carmin.

Cette fois, la relation entre constituants et sensation colorée n'est plus univoque, en ce sens que la même couleur peut être due à des mélanges très divers que l'œil (ou le cerveau !) est incapable d'analyser.

Quand les constituants sont en proportions convenables – grosso-modo de même importance – et recouvrant une très large gamme de longueurs d'onde, la sensation produite est le blanc.

Un autre facteur important est l'intensité lumineuse, du moins pour certaines couleurs : si le bleu, le rouge et le vert sont peu affectés quand elle baisse, le blanc devient gris, le jaune vire au marron, le vert-jaune au kaki et... l'orange au chocolat.

Voilà la clef de notre mystère. La lumière blanche, du Soleil ou de l'éclairage artificiel, est modifiée lors de sa rencontre avec les objets, et c'est la lumière ainsi altérée qui provoque une sensation de couleur. Pour ce qui nous occupe ici, il nous suffit d'admettre que certaines radiations monochromatiques sont atténuées par rapport aux autres, voire complètement supprimées.

III - FAIRE NAÎTRE DES COULEURS

Cela étant, quel rapport avec les couleurs de l'invisible ? La façon la plus commune de faire disparaître des composantes de la lumière blanche est de les absorber par un pigment ou une teinture : l'hémoglobine absorbe fortement les radiations bleues et vertes, le mélange restant nous donnant une sensation de rouge, rouge sang bien évidemment.

Ce procédé n'est pas le seul, et ce n'est en fait pas lui qui nous intéresse ici. Divers mécanismes physiques ont pour effet de séparer dans l'espace les radiations monochromatiques, ce qui nous permet d'observer une couleur dans une direction, et une autre ailleurs.

* Michel HENRY, Maître de Conférences, Université Pierre-et-Marie-Curie - PARIS.

Insistons bien sur le fait qu'aucune radiation n'est détruite : les radiations qui ne sont pas envoyées dans une direction se retrouvent ailleurs et il suffit de changer de position ou d'orientation pour les retrouver.

qu'elles interfèrent. Plus précisément, quand les maximums de l'une correspondent aux maximums de l'autre, les effets s'ajoutent et l'interférence est dite constructive. A contrario, les effets se retranchent quand les maxi-

me de l'une correspondent aux minimums de l'autre, auquel cas l'interférence est dite destructive, tous les cas intermédiaires étant bien entendu possibles. Maintenant, il est possible de séparer une onde en deux (ou plus), puis de réunir ses parties après leur avoir fait parcourir des trajets différents. Selon que la différence des trajets – nous disons la différence de marche – est multiple entier ou demi-entier de la longueur d'onde, l'interférence est constructive et la lumière accrue, ou destructive et la lumière atténuée voire supprimée.

Un exemple un peu plus compliqué est celui des grenouilles et lézards, qui sont verts comme chacun sait. Cette couleur résulte de la présence simultanée d'un phénomène de diffusion par des cristaux de guanine et d'un pigment jaune, souvent de type caroténoïde, qui absorbe le bleu. La couleur qui apparaît est alors celle qui suit immédiatement le bleu dans l'ordre de diffusion, c'est-à-dire le vert. Cette explication fut confirmée dans de curieuses circonstances : un biologiste ayant recueilli en Australie un spécimen de grenouille arboricole l'envoya – dans un bocal d'alcool – à un Muséum pour description et identification. A l'arrivée, la grenouille était bleue et fut donc nommée *Hyla Coerulea*. Or à l'état naturel, cette grenouille est verte. Il est facile d'imaginer ce qui s'était passé : au cours du voyage, l'alcool avait dissous le colorant jaune laissant les radiations bleues libres et changeant ainsi la couleur de l'animal.

Un autre exemple de diffusion, au moins aussi célèbre que les précédents est le ciel : les molécules d'azote, d'oxygène... qui composent l'air diffusent la lumière et donnent au ciel cette couleur, qui a fait nommer « planète bleue » la Terre. Outre sa couleur, la lumière diffusée a une intensité suffisante pour nous masquer les étoiles, au grand dam des astronomes qui sont obligés de travailler la nuit et d'établir leurs observatoires loin des villes pour échapper à la

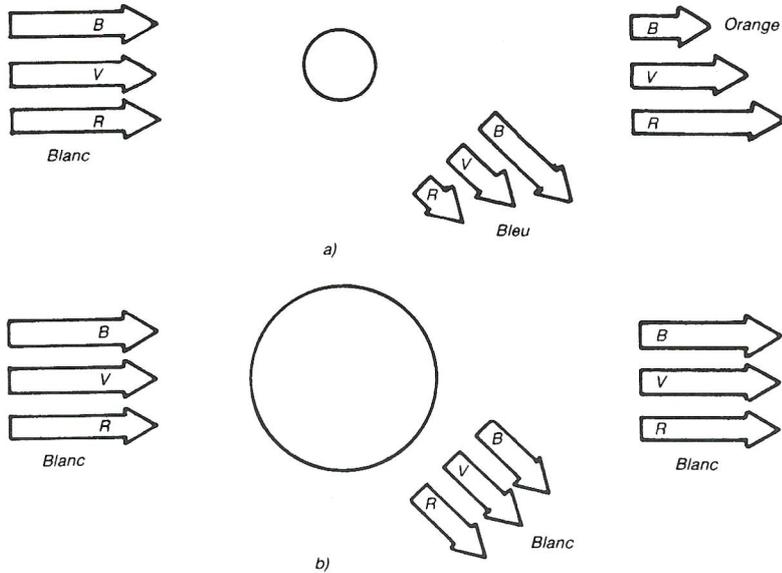


Fig. 1. – Diffusion de la lumière. La lumière réémise par de petites particules (a) est bleue tandis que la lumière transmise varie du jaune au rouge, selon la concentration de particules. Les grosses particules (b), par contre, diffusent et transmettent de la lumière de composition identique à celle de la lumière incidente, blanche dans notre cas. La composition de la lumière est symbolisée par les trois flèches R (rouge), V (vert), B (bleu).

Ces mécanismes sont assez nombreux, aussi nous limitons-nous, sinon aux plus importants, du moins à ceux que vous rencontrerez le plus souvent autour de vous : en l'espèce la diffusion, la réfraction et les interférences. Rappelons en quelques mots leurs caractéristiques essentielles.

Une particule (éventuellement un atome) recevant de la lumière la réémet dans toutes les directions de l'espace. Quand la particule est très petite, disons jusqu'à un dixième de micromètre pour fixer les idées, elle diffuse d'autant mieux les radiations que leur longueur d'onde est plus courte : à peu près seize fois plus les bleues que les rouges. Le milieu diffusant vu de côté nous paraît bleu, et la source de lumière jaune ou même rouge.

Cet effet est d'autant moins prononcé que la particule est plus grosse si bien qu'à partir d'une fraction de millimètre la lumière diffusée est pratiquement identique à la lumière incidente.

Au passage d'un milieu dans un autre, la lumière est déviée, réfractée disons-nous, l'angle de déviation étant d'autant plus important que la longueur d'onde est plus courte. Il en résulte une séparation spatiale des radiations monochromatiques, comme a pu s'en rendre compte quiconque a joué un jour avec un prisme de verre.

Enfin, quand deux ondes monochromatiques de même longueur d'onde voyagent ensemble, elles peuvent ajouter leurs effets, ou au contraire les retrancher. Nous disons

qu'elles interfèrent. Plus précisément, quand les maximums de l'une correspondent aux maximums de l'autre, les effets s'ajoutent et l'interférence est dite constructive. A contrario, les effets se retranchent quand les maxi-

IV - LA DIFFUSION DE LA LUMIÈRE

Assez de théorie. Je vous convie à une promenade au cours de laquelle nous aurons l'occasion de rencontrer les divers mécanismes dont je viens de parler, ce qui vous permettra de les toucher du doigt, si j'ose m'exprimer ainsi.

Tout d'abord, retrouvons notre vieille amie, la baleine aux yeux bleus. Quelle est l'origine de l'infinie variété des couleurs des yeux ?

Les biologistes nous disent : il existe dans les cellules postérieures de l'iris un pigment noir, la mélanine, dont le rôle est d'absorber la lumière. Dans les cellules antérieures, celles que nous voyons, se trouve une protéine, l'eumélanine, formant de petites particules pigmentées, lesquelles diffusent la lumière. Quand ces particules sont peu abondantes et très dispersées, l'iris ne renvoie vers l'avant que des radiations bleues et voilà pourquoi la

«pollution lumineuse» résultant de l'éclairage nocturne des cités modernes.

En plus des gaz, l'atmosphère contient de «grosses» particules : gouttes d'eau, poussières, cendres volcaniques... qui diffusent aussi la lumière mais réémettent du blanc plutôt que du bleu en raison de leur taille. Leur effet est d'autant plus marqué qu'elles sont plus nombreuses. C'est ainsi que par une belle journée le ciel est d'un bleu plus profond au zénith que près de l'horizon ou encore en montagne qu'en plaine.

Que l'atmosphère soit indispensable est surabondamment prouvé par les spatonautes : de leurs satellites ou de la Lune, ils voient le ciel noir – avec toutes ses étoiles.

Signalons à ce propos un phénomène aussi curieux que rare dont l'origine paraît due à la présence de fines cendres projetées par une éruption ou encore par des incendies de forêt, voire par des activités industrielles. Il s'agit du Soleil (ou de la Lune) bleu. Lorsque la taille des particules est adéquate, de l'ordre d'un demi-micromètre, les couleurs diffusées et transmises sont inversées par rapport à la situation habituelle : au lieu d'un Soleil jaune dans un ciel bleu nous voyons un Soleil bleu dans un ciel rougeâtre. Ce phénomène a été signalé à diverses reprises, ainsi lors de l'éruption du Krakatoa en 1883.

Poursuivons notre promenade. Des nuages blancs, puis noirs, masquent le ciel bleu. Il est temps de chercher un abri, l'orage menace. Au fait, les nuages sont formés de gouttes d'eau transparentes, pourquoi sont-ils blancs ?

Là encore, la diffusion fait naître des couleurs de l'invisible. Les gouttes d'eau sont beaucoup plus grosses que les molécules et diffusent une lumière de composition très voisine de celle de la lumière incidente, qui nous paraît blanche. Quand le nuage est très épais, la majeure partie de la lumière est déviée, nous avons une sensation de gris ou même de noir.

Un phénomène analogue se produit lorsque les cheveux meurent : ils se remplissent de bulles d'air et blanchissent. De fait, la totalité des objets blancs, y compris les peintures, se sont parce qu'ils diffusent ainsi la lumière.

V - RÉFRACTION ET DISPERSION

«Dans un coin lointain du ciel, maintenant pur, l'orage fuyant tordait en silence ses muscles violets. L'aile d'Iris pointait au-dessus de la colline». Jean Giono.

Depuis Homère, l'écharpe – ou aile – d'Iris est le très joli nom donné à l'arc-en-ciel. Point de diffusion, ici, mais de la réfraction. La lumière pénètre dans les gouttes de pluie, s'y réfléchit et en ressort pour rejoindre notre œil. Son trajet est tel que nous devons tourner le dos au Soleil, et que celui-ci doit être assez bas sur l'horizon.

Si nous traçons ainsi le chemin d'un grand nombre d'ondes lumineuses, nous consta-

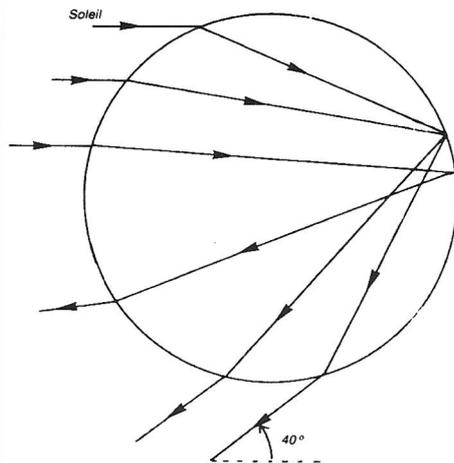


Fig. 2 a. – Trajet de la lumière dans une goutte de pluie. Plusieurs parcours sont représentés. La plupart des ondes ressortent sous un angle d'environ 40°, ce qui crée une accumulation de lumière et rend visible l'arc-en-ciel.

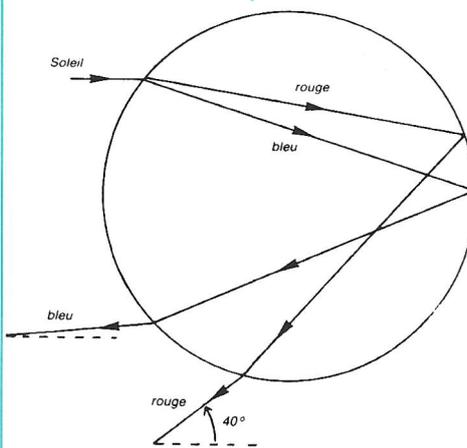


Fig. 2 b. – Dispersion de la lumière dans une goutte de pluie. Le passage dans la goutte sépare les radiations monochromatiques, les rouges étant un peu plus déviées que les bleues, les autres couleurs étant réparties entre deux.

tons que la majorité d'entre elles ressort de la goutte sous un angle d'environ 40°, ce qui crée une accumulation de lumière dans cette direction et donne à l'arc-en-ciel sa forme... d'arc de cercle.

Qui plus est, cet angle dépend de la couleur de la lumière, un peu plus élevé pour le rouge, un peu plus faible pour le bleu, si bien que les différentes radiations sont séparées dans l'espace. L'arc-en-ciel est irisé, avec le rouge à l'extérieur et le bleu à l'intérieur.

L'histoire ne s'arrête pas là : une partie de la lumière ne ressort de la goutte qu'après s'y être réfléchi deux fois. Il en résulte, selon le mécanisme précédent une nouvelle accumulation de lumière sous un angle d'environ 50° et un arc secondaire, avec cette différence que le bleu est à l'extérieur et le rouge à l'intérieur.

Les trajets des ondes sont tels qu'aucune, quelle que soit sa couleur, n'est déviée entre 40° et 50° – en chiffres ronds – si bien que l'espace compris entre les deux arcs est plus sombre que ceux intérieur à l'arc primaire ou

extérieur à l'arc secondaire. En hommage au philosophe grec Alexandre d'Aphrodisias (ca.200), cette région est nommée bande d'Alexandre. Il est piquant de noter que la théorie d'Alexandre, très voisine de celle d'Aristote, prévoyait au contraire un maximum de lumière. Le «paradoxe d'Alexandre» ne fut en fait élucidé qu'au XVII^e siècle, par Descartes.

Pouvons-nous imaginer que la lumière subit plus de deux réflexions dans la goutte ? Certes oui ! Toutefois, les arcs correspondants sont très peu lumineux, la majeure partie de la lumière s'étant déjà échappée de la goutte, et certains seraient situés près du Soleil, donc masqués par son intense éclat. De fait, il n'apparaît pas qu'un de ces arcs ait jamais été observé dans la nature, mais des simulations en laboratoire ont permis de les mettre en évidence jusqu'au 17^e ordre.

Et pourquoi ne voyons-nous pas le premier arc, celui qui serait formé sans aucune réflexion dans la goutte ? Pour deux raisons : il n'y a pas dans ces conditions d'accumulation de lumière dans une direction particulière et, de toute façon, cet arc serait situé trop près du Soleil pour être visible.

Dans tous les cas, l'angle de réfraction varie avec la couleur de la lumière si bien que la même goutte ne peut faire parvenir toutes les couleurs à l'œil de l'observateur. L'expérience est facile à faire par un beau matin d'automne, dans une prairie couverte de rosée : chaque goutte se pare de sa propre couleur, et il suffit de se déplacer un peu pour la voir changer. Il est un peu surprenant, mais tout-à-fait exact de dire que deux observateurs ne voient pas le même arc-en-ciel, et plus encore, que deux yeux voient des arcs différents.

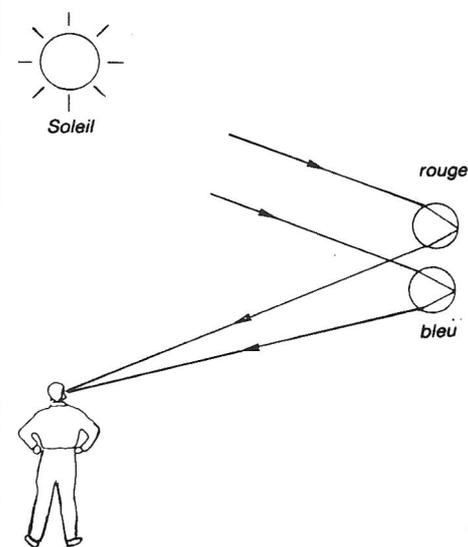


Fig. 2 c. – Observation d'un arc-en-ciel. Chaque goutte n'envoie qu'une onde vers l'œil de l'observateur qui tourne le dos au Soleil. L'arc est irisé avec le rouge à l'extérieur et le bleu à l'intérieur. Si le nuage de pluie n'est pas assez étendu, l'arc n'est pas complet.

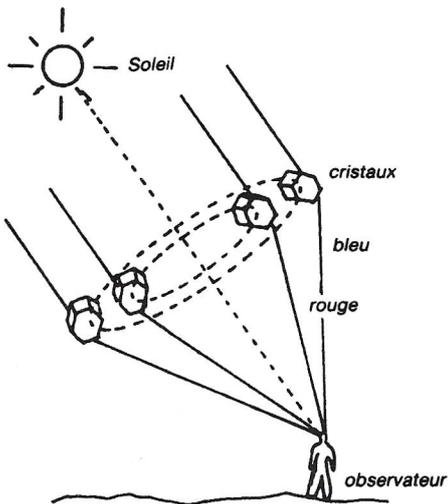


Fig. 3. - Observation d'une parhélie. Chaque cristal n'envoie qu'une onde vers l'œil de l'observateur qui fait face au Soleil. La géométrie des déviations entraîne une inversion des couleurs par rapport à l'arc-en-ciel : le bleu est plus dévié que le rouge.

La création de couleurs par réfraction et dispersion est assez rare dans la nature car elle requiert des objets transparents de grande taille (de l'ordre du millimètre au moins) et de forme régulière. Outre les gouttes d'eau de pluie, répondent à ces exigences les cristaux de glace formés dans les nuages de haute altitude comme les cirrus. L'observation *in situ* montre qu'ils ont la forme de prismes hexagonaux à base plane ou pyramidaux. Ces prismes, tout comme celui de Newton, dévient et dispersent la lumière avec une accumulation sous un angle de l'ordre de 22° , légèrement variable avec la couleur : le bleu est un peu plus dévié que le rouge et les autres couleurs se répartissent entre les deux. Pour la même raison que les gouttes d'eau de l'arc-en-ciel, chaque couleur provient d'un cristal particulier. Quand les glaçons ont toutes les orientations possibles, et quand le nuage est assez grand, nous voyons un cercle irisé autour du Soleil, avec le bleu à l'extérieur et le rouge à l'intérieur : c'est le halo de 22° . Plus fréquemment, les cristaux de glace qui tombent lentement dans l'air s'orientent parallèlement les uns aux autres. Le cercle est réduit à deux taches situées de part et d'autre du Soleil, les parhélies.

Pour ceux d'entre vous qui souhaitent observer ces phénomènes, voici un petit «truc» : allongez le bras, étendez la main en écartant au maximum les doigts ; l'angle pouce-œil-auriculaire est très voisin de 22° .

VI - INTERFÉRENCES

La pluie a cessé, nous pouvons repartir. Sur le goudron mouillé de la route, quelques gouttes d'essence tombées d'une automobile s'étalent et bientôt apparaissent de splendides couleurs, très semblables à celles des bulles de savon : rien d'étonnant, elles ont même origine, les interférences.

L'onde lumineuse qui arrive à l'interface entre l'air et l'essence est divisée en deux, la

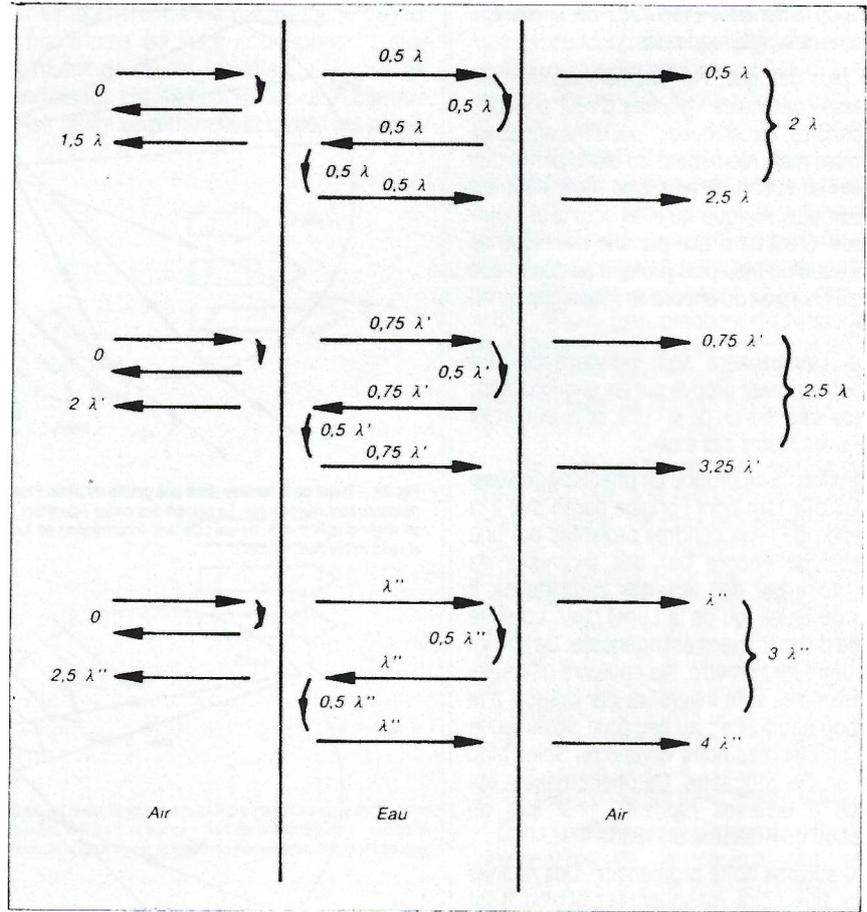


Fig. 4. - Interférences dans une bulle de savon. La lumière provenant de la gauche est réfléchiée à chaque interface eau/air. Le schéma et le calcul sont répétés pour trois radiations de longueurs d'onde λ , $\lambda' = \frac{2}{3}\lambda$ et $\lambda'' = 0,5\lambda$. Les chiffres indiquent à chaque étape le retard par rapport à l'onde incidente. Pour les radiations de longueur d'onde x et x' , il y a interférence constructive pour la lumière transmise et destructive pour la lumière réfléchiée. C'est le contraire pour la radiation de longueur d'onde λ' .

plus grande partie passant dans l'essence et le reste étant réfléchi. L'interface essence-eau effectue une nouvelle séparation, une faible proportion de la lumière étant renvoyée vers l'air où elle se combine - interfère avec - celle réfléchiée sur l'essence.

Maintenant, l'onde réfléchiée par l'eau a parcouru un trajet plus long que celle réfléchiée par l'essence, si bien qu'elle est en retard par rapport à elle. Ce retard dépend de l'épaisseur d'essence traversée et de la vitesse de la lumière dans l'essence. Par contre, il ne dépend pas - ou très peu - de la couleur de la lumière.

Dans le cas de notre tache d'essence, comme pour les bulles de savon, une complication supplémentaire doit être prise en compte : la réflexion dans l'essence introduit un retard supplémentaire d'une demi-longueur d'onde, la vitesse de propagation de la lumière y étant plus faible que dans l'air et que dans l'eau. Signalons à ce propos que le retard supplémentaire d'une demi-longueur d'onde ne doit être introduit que lors de la réflexion, et à condition que la lumière se déplace moins vite dans le milieu où elle se propage que dans l'autre.

En bref, toutes les radiations pour lesquelles le retard global est d'un nombre entier de

longueurs d'onde sont exaltées, les autres étant atténuées. Pour deux ondes, ces conditions sont assez peu restrictives, et les couleurs sont très mélangées - les peintres disent impures - ce qui n'enlève d'ailleurs rien à leur beauté. Lorsque l'épaisseur varie, la teinte est modifiée, la succession des couleurs étant nommée «échelle des teintes de Newton». Un peu d'eau, un peu de produit à vaisselle, et voici de splendides bulles où il vous est loisible d'observer l'échelle des teintes.

Il est aisé de voir, en comptant les retards, qu'une couleur exaltée par réflexion est atténuée par transmission, et vice versa. Là encore, la traversée de la couche mince n'a rien supprimé, elle s'est bornée à séparer les couleurs. Quelles que soient les radiations réfléchies ou transmises, leur combinaison redonne la lumière blanche de départ si bien que les teintes réfléchies et transmises sont complémentaires l'une de l'autre.

Au fur et à mesure que nous approchons de la tache d'essence, nous voyons évoluer les couleurs. La raison en est simple : changeant notre position, nous modifions l'inclinaison des ondes lumineuses qui atteignent notre œil après s'être réfléchies sur l'essence. Un peu de géométrie montre qu'une diminution de

l'inclinaison entraîne une diminution du retard entre les ondes et qu'en conséquence la couleur vire vers le rouge. Bien entendu, ce serait l'inverse pour la lumière transmise.

De telles couches existent dans la nature, outre les bulles de savon ou les taches d'essence sur les routes. Tout près de nous, les ailes de la mouche – oui, notre compagne familière *Musca Domestica* – ou celles de la gracieuse libellule sont souvent colorées en rose ou en vert par le même phénomène.

Elles sont aussi créées par l'homme, ainsi les revêtements des objectifs photographiques ou, plus récemment, les verres correcteurs. Dans ce dernier cas, l'épaisseur de la couche est calculée pour que le maximum de lumière transmise, ce qui intéresse au premier chef le porteur de verres, se trouve dans le jaune, couleur à laquelle l'œil est le plus sensible. La lumière réfléchie a la couleur complémentaire, d'où l'aspect bleuté des verres correcteurs pour un observateur « extérieur ».

Près de nous s'est posé un pigeon. Son encolure « se pare de couleurs variées dès qu'elle se tourne dans un sens ou dans l'autre ». Sénèque.

Chose curieuse, les couleurs nous paraissent plus pures que celles de la tache d'essence.

Pour en avoir le cœur net, empruntons une plume à ce pigeon et observons-la au microscope électronique. Apparaissent une série de lames de kératine séparées par des couches de mélanine. A chaque interface, l'onde lumineuse est divisée en une onde transmise et une onde réfléchie, si bien que nous devons combiner non plus deux ondes mais un plus grand nombre, et ceci aussi bien pour la lumière transmise que pour la lumière réfléchie. Il en résulte que la condition d'interférence constructive est plus stricte car le décalage est amplifié par le nombre d'ondes. S'il vaut par exemple un dixième de longueur d'onde entre les deux premières ondes, il atteint une demi-longueur d'onde entre la première et la cinquième, qui se détruisent... et ainsi de suite.

De tels empilements ne sont pas rares dans le règne animal : outre le pigeon, nous les trouvons chez le paon, dans les ocelles des plumes de la queue, le martin pêcheur et surtout les paradisiers et colibris, véritables bijoux volants. Certains papillons comme *Morpho* ou *Urania*, beaucoup de coléoptères, et aussi la nacre des coquillages comme l'ormeau, des écailles de poisson, sont irisés grâce au même phénomène.

Signalons un cas insolite, celui de la piéride du chou, petit papillon jaune dont le mâle et la femelle se ressemblent beaucoup, du moins à première vue (la nôtre !). Les écailles du mâle sont toutefois stratifiées comme les plumes de pigeon, mais l'épaisseur des couches est telle que le maximum de réflexion se produit dans l'ultra-violet. Il existe donc un dimorphisme sexuel marqué, auquel nous ne

sommes pas sensibles mais qui, après tout, est plus important pour la piéride que pour l'entomologiste.

Il est très facile de faire varier la couleur, par modification de l'épaisseur des couches, et certains biologistes voient là une manifestation du principe d'économie de la nature : il est certes plus facile d'ajouter ou de retrancher un peu de kératine que d'inventer des molécules complexes de colorants.

Stratifier un milieu transparent nous permet d'isoler une couleur avec d'autant plus de précision que le nombre de couches est plus élevé. L'épaisseur de chacune étant de l'ordre du dixième de micromètre, il est difficile d'en entasser plus de quelques milliers sous peine d'arriver à des épaisseurs prohibitives. Un processus voisin, mais plus économique d'espace, consiste à strier régulièrement une surface à raison de quelques dizaines ou centaines de stries par millimètre, de façon à réaliser un réseau.

Chaque strie réémet – nous disons diffracte – une onde. Le raisonnement précédent montre que les radiations d'une couleur déterminée n'existent que dans quelques directions bien déterminées, si bien que nous réalisons à nouveau la séparation des couleurs. Pour les raisons indiquées ci-dessus, les couleurs sont très pures ; en fait, il s'agit du meilleur procédé dont nous disposions pour isoler une onde monochromatique.

Assez curieusement, ces structures sont assez rares dans la nature. Citons les élytres d'un coléoptère portant le joli nom de *Serica Sericea* et à nouveau la nacre. A l'état naturel, ses couleurs résultent des interférences de la lumière dans la structure multicouches d'aragonite et de conchyoline. Une fois la nacre polie, l'affleurement de ces couches forme un réseau et c'est celui-ci qui donne naissance aux chatoyantes irisations des incrustations ou des bijoux.

Plus près de nous, les disques « microsill-

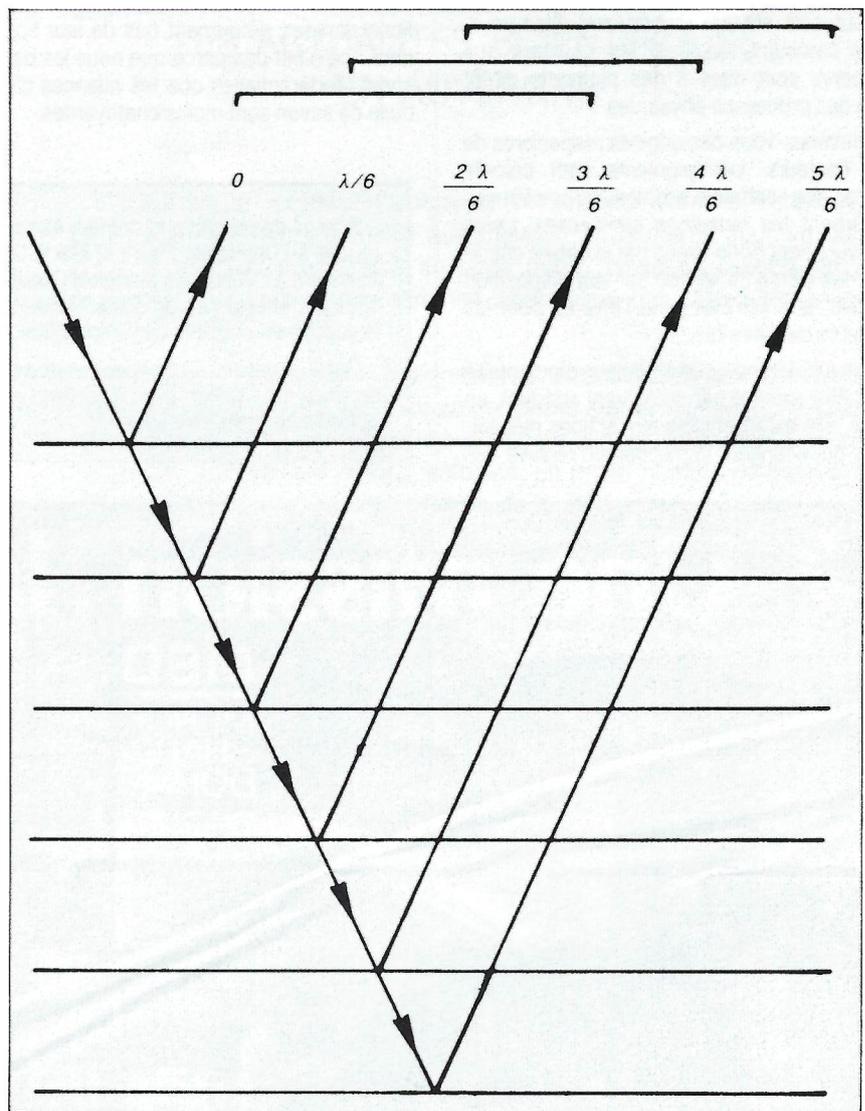


Fig. 5. – Interférences à ondes multiples. Le schéma correspond à six interfaces, ce qui donne six ondes réfléchies, chacune étant en retard d'un sixième de longueur d'onde par rapport à celle qui précède. Les retards sont indiqués par rapport à la première onde réfléchie. Les ondes se détruisent deux à deux, si bien qu'au total il n'y a pas de lumière réfléchie pour cette radiation.

LE DOSSIER

lon» et plus encore les disques «compact» jettent leurs feux en raison de la striation régulière formée par les pistes d'enregistrement de la musique.

Une application plus directe proposée il y a quelques années est la réalisation de diapositives en couleurs sans colorants donc peu susceptibles de s'altérer en prenant de l'âge. Par un choix convenable de la forme et de l'espacement des stries, il est possible d'isoler une des trois couleurs fondamentales de la synthèse trichrome. En superposant trois de ces réseaux, un par couleur, nous pouvons restituer les autres, comme dans n'importe quelle diapositive en couleurs. Ce procédé comme celui de Lippmann présente l'avantage d'être insensible, nous venons de le dire, aux outrages du temps et se prête bien à la duplication. Par contre, il est trop compliqué – et aussi trop coûteux – pour des diapositives isolées, celles de vos vacances par exemple.

VII - RECONNAÎTRE LES COULEURS DE L'INVISIBLE

Tout cela est bel et bon, me direz-vous, mais comment savoir si les couleurs que j'observe sont dues à des pigments plutôt qu'à des processus physiques ?

Souvenez-vous des origines respectives de ces couleurs. Les pigments sont colorés parce que certains atomes ou molécules absorbent les radiations lumineuses. Leurs couleurs sont donc fixées par la nature chimique des éléments, et non par leur disposition relative, et c'est tout juste l'inverse pour les couleurs de l'invisible.

Autre différence : une couleur pigmentaire peut être extraite par un solvant adéquat, en outre, elle est insensible aux actions mécaniques qui changent la disposition relative des

atomes mais non leur nature chimique. Enfin, les indices les plus probants sont l'aspect, les couleurs de l'invisible ayant le plus souvent un éclat brillant très caractéristique, et le fait que les radiations absorbées par un pigment sont définitivement perdues tandis qu'elles sont simplement séparées par les processus physiques : à une couleur observée dans une direction doivent être associées d'autres couleurs visibles dans d'autres directions.

Il ne faut pas oublier, enfin, que dans la nature les diverses origines des couleurs sont très souvent présentes en même temps, ainsi pour les grenouilles ou la nacre, ce qui ne facilite pas les choses.

VIII - CONCLUSION

Nous voici au terme de notre trop bref voyage mais sachez que nous n'avons entrevu que la partie émergée de l'iceberg. J'ai essayé de vous montrer sur quelques exemples comment naissent les couleurs de l'invisible mais surtout que mes explications ne vous détournent pas de leur splendeur : ce n'est pas parce que nous les baptisons interférentielles que les nuances d'une bulle de savon sont moins chatoyantes.

Je serais désolé que vous ayez vu rouge, ou ri jaune, mais si je vous en ai fait voir de toutes les couleurs, je me sentirai pardonné car :

«L'arc-en-ciel le fait bien et personne ne lui dit rien». Prévert.

M.H.

Ce sujet a fait l'objet d'une conférence prononcée, au Palais de la Découverte le 10 décembre 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- D.L. FOX
"Animal biochromes and structural colours".
 (Cambridge, 1967).
- R. GREENLER
"Rainbows, halos and glories" - (Cambridge, 1980).
- M. HENRY
"Les réseaux colorés" - (La Recherche, janvier 1981).
- M. HENRY
"Les images insolites" - (La Recherche, mai 1983).
- M. HENRY
"Mirages, halos et gloires"
 (Revue du Palais de la Découverte, novembre 1987).
- P. KOWALISKI
"Vision et mesure de la couleur" - (Masson, 1978).
- M. MINNAERT
"Light and colour in the open air" - (Dover, 1964).

Agrégé de physique et docteur ès sciences physiques, Michel Henry est Maître de Conférences à l'Université Pierre-et-Marie-Curie de Paris, après avoir été assistant, puis Maître-Assistant à l'Université Marien-N'Gouabi de Brazzaville (République du Congo). Ses recherches portent sur l'étude des propriétés fondamentales des cristaux photoréfringents et sur le codage en couleurs de l'information.

Outre plusieurs conférences et de nombreuses publications, dont des articles de vulgarisation, il est l'auteur, avec R. Jouanisson, d'un recueil d'expériences utilisant le laser, cette nouvelle source de lumière.

Une mission : la santé.

MSD
 MERCK
 SHARP
 DOHME
 CHIBRET

Centre de Recherche de Riom (Puy-de-Dôme)

LABORATOIRES MERCK SHARP & DOHME-CHIBRET

3, Avenue Hoche - 75008 Paris ☎ 42 67 97 22



ADASTA

AUVERGNE SCIENCES

Supplément au Bulletin de l'ADASTA - N° 11-12 Octobre - Novembre - Décembre 1989

JOURNÉE PAUL LANGEVIN (24 MAI 1989)

LES ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES EN AUVERGNE

SOMMAIRE

- **Le principe de résolution en Logique du premier ordre Application au langage Prolog**
par Marcel Guillaume 2
- **Application d'un algorithme stochastique d'optimisation à la restauration des images**
par P.L. Hennequin 11
- **Modèles mathématiques pour l'économie**
Une approche non parétienne de la notion d'équilibre
par Alain Quilliot 14

L'Académie de CLERMONT a organisé en 1989 deux journées "Langevin". Le 24 mai 1989 s'est déroulée aux Cézeaux la deuxième Journée dont l'objectif était de présenter à un large public quelques aspects de la recherche de pointe menée dans les laboratoires des universités auvergnates.

Le Ministre de l'Education Nationale avait encouragé de telles initiatives dans les régions. En les adaptant aux sciences mathématiques, physiques et biologiques, nous avons voulu nous inspirer des traditionnels "entretiens de Bichat" qui drainent chaque automne, un grand nombre de praticiens venus s'informer des derniers progrès de la médecine.

Cette "journée auvergnate" a été une réussite puisque près de 200 auditeurs ont suivi les différentes conférences.

La Mission Académique de CLERMONT a donc organisé cette journée et a pris en charge les frais d'intervention et les déplacements des auditeurs.

Il nous a paru utile de publier le contenu de ces exposés. Dans ce numéro d'Auvergne-Sciences, bulletin de l'ADASTA, sont réunies toutes les conférences concernant les mathématiques et dont le thème est "Simulation de processus mentaux ou physiques et applications".

Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs M. GUILLAUME, P.L. HENNEQUIN et A. QUILLIOT qui ont bien voulu rédiger les textes qui suivent.

Les autres conférences concernant la biologie et les sciences physiques seront publiées dans le prochain numéro qui paraîtra en février 1990.

Le Chef de Mission
J.L. IRIGARAY

LE PRINCIPE DE RESOLUTION EN LOGIQUE DU PREMIER ORDRE :

APPLICATION AU LANGAGE PROLOG

par Marcel Guillaume*

Conçue par J.A. Robinson [5] en 1965, la méthode de résolution est une descendante de la méthode des tableaux (qui ont été dits "sémantiques") introduits par E.W. Beth aux alentours de 1950, et elle-même une variante des systèmes de "déduction naturelle" de Gentzen [4].

L'une et l'autre sont des exemples de ce que l'on appelle, selon que l'on est logicien ou informaticien, une "algorithmie de semi-décision pour le calcul des prédicats du premier ordre" ou un "démonstrateur de théorèmes".

Vous savez peut-être ce que sont les "tables de vérité", déjà connues des Stoïciens, retrouvées en 1879 par Frege, et grâce auxquelles on explique le contenu *logique* de certaines conjonctions et locutions conjonctives (en laissant de côté les contenus de leurs significations qui ressortissent à d'autres aspects du fonctionnement de l'esprit, par exemple le côté psychologique). J'en rappelle trois ci-dessous.

NÉGATION

A	NON-A
VRAI	FAUX
FAUX	VRAI

CONJONCTION (ET)

A	B	A ET B
VRAI	VRAI	<u>VRAI</u>
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	FAUX

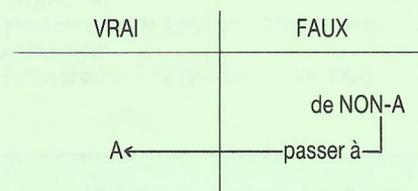
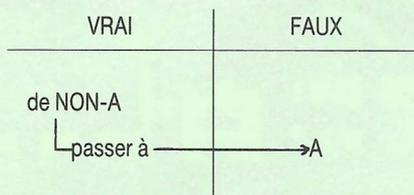
IMPLICATION (CONDITIONNELLE)

A	B	A ⇒ B	(B SI A)
VRAI	VRAI	VRAI	
VRAI	FAUX	<u>FAUX</u>	
FAUX	VRAI	VRAI	
FAUX	FAUX	VRAI	

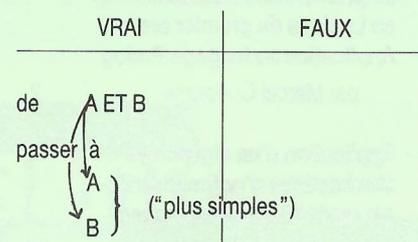
(sur la dernière table, on lit que $A \Rightarrow B$ est "équivalente" à la "forme normale disjunctive" $(A \text{ ET } B) \text{ OU } (\text{NON-}A \text{ ET } B) \text{ OU } (\text{NON-}A \text{ ET NON-}B)$ car celle-ci décrit les lignes où figure le VRAI dans la colonne de $A \Rightarrow B$).

Pour constituer des *tableaux de Beth*, on use de ces tables, en quelque sorte, à l'envers.

Un tableau de Beth est une trace formalisée de la recherche d'une interprétation des symboles non logiques (noms de relations, noms de fonctions, constantes) astreinte à rendre vraies les expressions d'une liste, et fausses les expressions d'une autre liste. Cette trace se matérialise par la constitution progressive de ces listes, l'une, des expressions astreintes au VRAI, l'autre, des expressions astreintes au FAUX, en suivant, en ce qui concerne les conjonctions dont j'ai donné les tables de vérité plus haut, les règles qui suivent (et des règles analogues pour les conjonctions dont je n'ai pas parlé) :

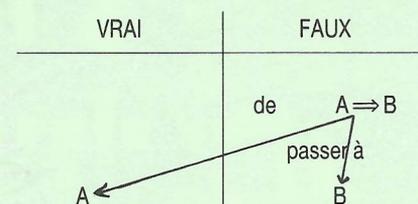


Dans chacun de ces cas, le problème posé pour l'expression "plus compliquée" NON-A est ramené à un problème analogue posé pour l'expression "plus simple" A.



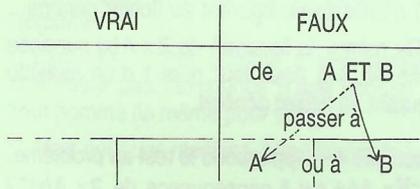
En effet, le seul cas (souligné dans la 3^e colonne) où la table de vérité de A ET B indique que celle-ci est vraie, est celui dans lequel A et B sont simultanément vraies.

De même, puisqu'il y a un et un seul FAUX dans la 3^e colonne de la table de $A \Rightarrow B$, on applique la règle



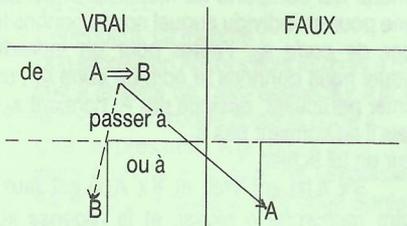
* Marcel GUILLAUME, Professeur à l'Université Blaise-Pascal.

S'il y a plusieurs VRAI ou plusieurs FAUX dans la 3^e colonne d'une table de vérité, cela donne lieu à la considération de plusieurs cas possibles, introduisant des branchements, sources de complexité :



Il y a 3 FAUX dans la 3^e colonne de la table A ET B, mais on montre qu'on ne perd pas de généralité en considérant des cas qui ne s'excluent pas, et qu'il suffit alors d'en considérer deux :

- le premier (correspondant à la partie du tableau en pointillé) est celui où A lui-même est astreint à être faux ;
- le second est celui où B lui-même est astreint à être faux ;
- Le traitement de $A \Rightarrow B$ astreint au VRAI est analogue :



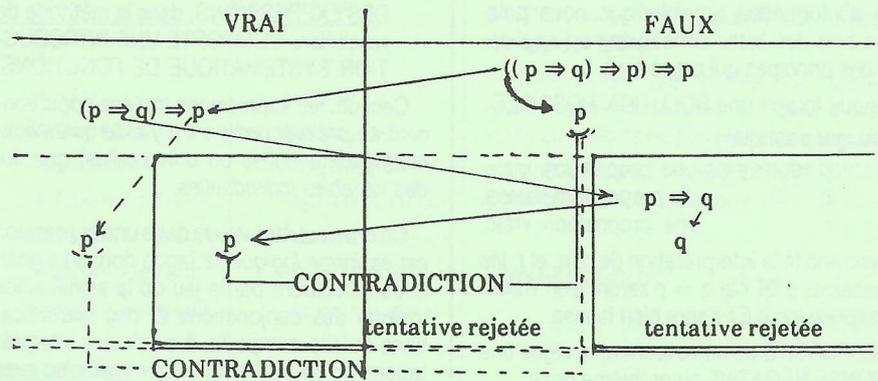
Par itération de l'application de ces règles, et de la règle "on ne peut admettre de contradiction, c'est-à-dire qu'une même expression puisse à la fois être astreinte au VRAI et être astreinte au FAUX", on peut tester si une expression est conséquence d'autres, ou nécessairement vraie.



Exemple 1. - Je dis que, quelles que soient les significations des symboles p et q (qui représentent des propositions sans en représenter d'analyse), l'expression $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$, (dite "loi de Peirce") ne peut qu'être vraie (on la dit "valide").

On applique le *test de Beth* en se faisant l'avocat du diable ; on suppose, au départ, que la "loi de Peirce" puisse être astreinte au FAUX, et on applique les règles.

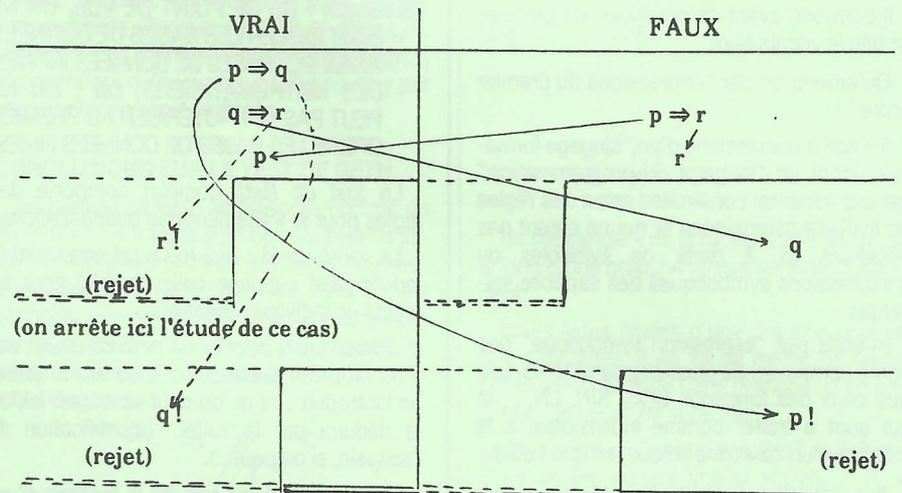
Le tableau se développe comme suit :



Conclusion : on doit examiner deux cas, et dans chacun d'eux, on se heurte à une contradiction ; il est impossible, sans contradiction de supposer fausse la "loi de Peirce" ; donc, elle est valide. (Vous pouvez aussi vérifier en la soumettant au test des tables de vérité).

Exemple 2. - Appliquons le test au problème "des hypothèses $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, la conclusion $p \Rightarrow r$ résulte-t-elle ?"

Supposons que NON : on pourrait donc astreindre $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ au VRAI, et $p \Rightarrow r$ au FAUX, et à partir de là le tableau se développe comme suit :

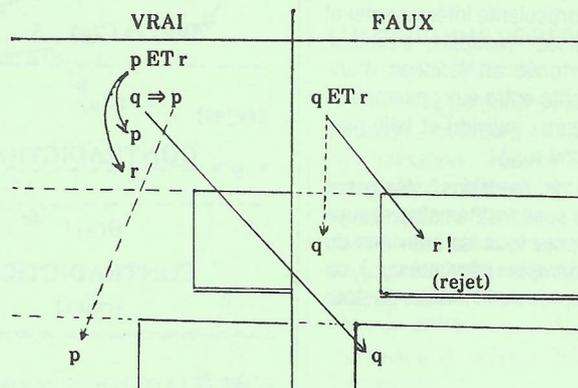


Conclusion : nous avons examiné 1 cas et deux sous-cas d'un autre, et dans chacun, nous sommes heurtés à une contradiction.

L'ECHEC de la tentative signe une réponse OUI à la question posée.

Exemple 3. - Appliquons maintenant le test au problème : "des hypothèses p ET r, $q \Rightarrow p$, la conclusion q ET r résulte-t-elle ?"

Supposons que NON, et cherchons à astreindre p ET r et $q \Rightarrow p$ au VRAI, et q ET r au FAUX ; à partir de là, le tableau se développe ainsi :



Le test s'arrête parce que nous n'avons plus d'information nouvelle que nous puissions tirer des listes constituées en application des principes qui précèdent.

Il nous fournit une SOLUTION POSSIBLE : s'arranger pour que :

- p représente une proposition vraie,
- q une proposition fausse,
- r une proposition vraie,

Avec une telle interprétation de p, q, et r, les expressions p ET r et $q \Rightarrow p$ seront bien vraies, et l'expression q ET r sera bien fausse.

La REUSSITE de notre recherche signe une REPONSE NEGATIVE au problème posé.

Eh bien ! la méthode de résolution utilise au départ la même idée :

Chercher la réponse au problème :

"C résulte-t-elle des hypothèses H_1, H_2, \dots, H_k ?" en cherchant à déduire "mécaniquement" CONTRADICTION des hypothèses H_1, H_2, \dots, H_k et NON-C.

(remarque : supposer NON-C vraie revient à supposer C fausse).

Il convient, avant de continuer, de préciser un peu le vocabulaire.

Qu'entend-on par "expressions du premier ordre" ?

Il s'agit d'expressions d'un "langage formalisé" (dont un "langage de programmation" est une variante) construites selon des règles de syntaxe déterminées et qui ne seront pas détaillées ici, à partir de symboles ou d'expressions symboliques des espèces suivantes

(j'entends par "expression symbolique" des noms composés de plusieurs caractères, tels que ceux des fonctions COS, SIN, LN, ..., et qui sont à traiter comme indivisibles, à la manière d'un caractère unique, tel que f ou Φ) :

- les *variables individuelles* désignent des individus non spécifiés (théoriquement répertoriés dans le "fichier général" d'une base de données - qu'en mathématiques on n'exclut pas infinie ; par exemple, le fichier des nombres entiers naturels est souvent assimilé au "fichier général" de bases de données mathématiques infinies) ;
- les *constantes "de relation"* désignent les fichiers partiels (individus répertoriés en fonction d'une particularité intéressante) et les "fichiers croisés" (couples, triplets, ... d'individus répertoriés en fonction d'une relation intéressante entre eux ; exemples : ouvrages et auteurs ; individu et telle performance ; filiations ; ...);
- les *constantes "de fonctions"* désignent des fonctions (au sens mathématique) supposées définies pour tous les individus du fichier général (exemple : père, mère, ...), ou pour tous les couples dudit fichier, ou pour tous les triplets...

Remarque : LE TRAITEMENT "LOGIQUE" DES EXPRESSIONS, dans la méthode de résolution, COMPORTE UNE INTRODUCTION SYSTEMATIQUE DE FONCTIONS.

Ceci dit, les expressions traitées appartiennent au *premier ordre* s'il n'y a de quantifications (existentielles ou universelles) que sur des variables individuelles.

Ce qui peut être *valide* dans une expression est sa *forme logique* (la façon dont sa signification s'élabore par le jeu de la signification logique des conjonctions et des quantifications qu'elle comporte, à partir des interprétations qu'on peut donner aux symboles avec lesquels elle est écrite) ; cette forme est *valide* si elle est vraie pour toute interprétation de ces symboles dans toutes les bases de données concevables.

De même, du point de vue de la *validité des raisonnements*, une expression est conséquence d'hypothèses (qui sont elles-mêmes des expressions) si sa forme est vraie dans toutes les bases de données où sont vraies les formes correspondantes de ces hypothèses.

Remarque : DE CE POINT DE VUE, ON NE PEUT ISOLER LES BASES DE DONNEES FINIES DES BASES DE DONNEES INFINIES DES MATHEMATICIENS, car : ON NE PEUT PAS CARACTERISER AU PREMIER ORDRE LES BASES DE DONNEES FINIES.

Le *test de Beth* complet comporte des règles pour le traitement des *quantifications* :

La vérité de $\exists x A(x)$ (où x est une variable individuelle) suppose celle de A(a) pour au moins un individu appelé a...

... mais a est pour lui un *nom de code* ; car il ne faut rien supposer d'autre sur a quand on l'introduit ; ce qu'on peut savoir sur lui, on le déduira par la suite... (identification de l'assassin, si on peut...).

Autrement dit, on enrichit le langage d'une *nouvelle constante d'individu* quand on introduit A(a) à partir de $\exists x A(x)$.

Même chose pour la fausseté de $\forall x A(x)$: elle suppose celle de A(a) pour un nouveau nom a pour un individu à chercher...

Quant à la *vérité* de $\forall x A(x)$ (où x est une variable individuelle), elle suppose celle de A(t) pour tout nom t (on appelle cela un "terme" ; par exemple : "la mère de Jean" en est un) d'un individu figurant au fichier général...

De même, la fausseté de $\exists x A(x)$ suppose celle de A(t) pour tout nom t d'un individu figurant au fichier général.

Exemple 4. - Appliquons le test au problème.

" $\forall x A(x)$ est-il conséquence de $\exists x A(x)$?" Supposons que NON : il existe donc une interprétation de A (dans une base de données convenable, qu'on cherche) telle que $\exists x A(x)$ soit astreinte au VRAI, et $\forall x A(x)$ au FAUX.

A partir de là, le tableau se développe ainsi :

VRAI	FAUX
$\exists x A(x)$ ↓ A(a ₀)	$\forall x A(x)$ ↓ A(a ₁)

et on ne peut aller plus loin faute d'en savoir plus sur A ; on n'a pas rencontré de contradiction.

Et voici la réponse : imaginons un fichier général qui comporte au moins deux fiches, l'une pour un individu auquel nous donnons le *nom de code* a₀, l'autre pour un individu auquel nous donnons le *nom de code* a₁ ; un fichier particulier, désigné par A, contient a₀ ; mais il ne contient pas a₁.

Pour un tel fichier,

$\exists x A(x)$ est vrai, et $\forall x A(x)$ est faux.

Notre *recherche a réussi*, et la *réponse* au problème posé est *négative*.

Exemple 5. - " $\forall x [A(x) \Rightarrow C(x)]$ est-elle conséquence de

$\forall x [A(x) \Rightarrow B(x)]$ et $\forall x [B(x) \Rightarrow C(x)]$?"

Supposons que NON ; le tableau se développe ainsi :

VRAI	FAUX
3. $\forall x [A(x) \Rightarrow B(x)]$	1. $\forall x [A(x) \Rightarrow C(x)]$
4. $\forall x [B(x) \Rightarrow C(x)]$	2. $A(a) \Rightarrow C(a)$
$A(a) \Rightarrow B(a)$ 6.	$C(a)$
$B(a) \Rightarrow C(a)$ 5.	(cf. exemple 2)
(rejet) $C(a) !$	$B(a)$
CONTRADICTION	
$B(a) !$	$A(a) !$
CONTRADICTION (rejet)	CONTRADICTION (rejet)

ECHEC DE LA RECHERCHE (on a obtenu CONTRADICTION dans tous les cas) : REPONSE POSITIVE AU PROBLEME POSE.

Exemple 6. - " $\exists y \forall x A(x,y)$ est-elle conséquence de $\forall x \exists y A(x,y)$?".

(La convergence uniforme et la convergence simple contiennent respectivement des sous-expressions de la première et de la seconde forme, qui font la différence !).

Remarque. Intuitivement la réponse est négative.

Exemple : "tout homme a une épouse" n'entraîne pas l'existence d'une épouse de tout homme (la même pour tous) !

Mais pour une machine ? Appliquons le test.

VRAI	FAUX
$\forall x \exists y A(x,y)$ 1 * 5	$\exists y \forall x A(x,y)$ 2 *
$\exists y A(a,y)$ 3	$\forall x A(x,a)$ 4
$A(a,a_1)$	$A(a_2,a)$
$\exists y A(a_1,y)$	$\forall x A(x,a_1)$
$\exists y A(a_2,y)$	$\forall x A(x,a_2)$
$A(a_1,a_3)$	$A(a_5,a_1)$
$A(a_2,a_4)$	$A(a_6,a_2)$

La seule chose qu'on suppose sur une base de données c'est que son fichier général n'est pas vide... a est le code de la première fiche.

Que remarquons-nous ?

1 - Ça BOUCLE !

2 - Cependant, ça marche :

Une expression $A(a,b)$ s'écrit toujours à gauche à la suite de l'expression $\exists y A(a,y)$: le code b s'introduit après le code a.

Une expression $A(a',b')$ s'écrit toujours à droite à la suite de l'expression $\forall x A(x,b')$: le code a s'introduit après le code b'.

Que $A(a,b)$ soit la même que $A(a',b')$ nécessiterait que a soit a' et que b soit b', et les deux précédences simultanées.

Enfin les formules quantifiées dans la liste de gauche ne peuvent être les mêmes que les formules quantifiées dans la liste de droite.

3 - Cette conclusion appartient, cependant, à l'observateur de la machine, et non à la machine elle-même.

Ce procédé dit de *Skolemisation* (du nom de l'algébriste et logicien norvégien Th. Skolem (1887-1963)) va permettre d'y remédier.

Dans ce que nous venons de faire, chercher à *satisfaire* (par une base que l'on cherche) $\forall x \exists y A(x,y)$ nous conduit à chercher à écrire la table d'une fonction f telle que $\forall x A(x,f(x))$ soit vraie.

Une fonction ainsi introduite dans ce but est appelée une "fonction de Skolem".

De même, chercher à *infirmer* $\forall y \exists x A(x,y)$ conduit à chercher à écrire la table d'une fonction g telle que $\exists y A(g(y),y)$ soit fausse.

Le tableau précédent devient :

VRAI	FAUX
$\forall x A(x,f(x))$	$\exists y A(g(y),y)$
$A(a,f(a))$	$A(g(a),a)$
$A(f(a),f(f(a)))$	$A(g(f(a)),f(a))$
$A(g(a),f(g(a)))$	$A(g(g(a)),g(a))$
$A(f(f(a)),f(f(f(a))))$	$A(g(f(f(a))),f(f(a)))$
$A(f(g(a)),f(f(g(a))))$	$A(g(f(g(a))),f(g(a)))$
$A(g(g(a)),f(g(f(a))))$	$A(g(g(f(a))),g(f(a)))$
$A(g(g(a)),f(g(g(a))))$	$A(g(g(g(a))),g(g(a)))$
Forme générale des expressions de cette liste.	Forme générale des expressions de cette liste.
$A(t,f(t))$	$A(g(u),u)$

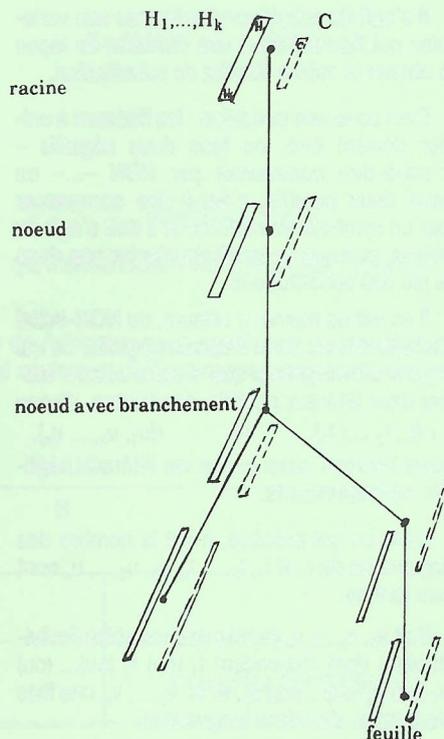
Pour qu'une contradiction résulte de l'unification de $A(x,f(x))$ et $A(g(y),y)$ en substituant t à x et u à y, il faudrait que t soit g(u), mais alors f(t) serait f(g(u)) et non u.

Ce n'est pas le cas, donc le tableau précédent se développe sans contradiction.

Mais, de plus, une machine peut déceler l'impossibilité d'unifier $A(x,f(x))$ et $A(g(y),y)$: elle écrira (par exemple) $A(g(y),f(g(y))) A(g(y),y)$ et constatera qu'aucune substitution de y par un autre terme n'est unifiante.

CONCLUSIONS SUR LE TEST DE BETH

Un tableau de Beth se présente comme un arbre dont les nœuds sont des couples de listes d'expressions (les premiers termes, d'expressions astreintes au VRAI, les seconds, d'expressions astreintes au FAUX), les listes des fils d'un nœud prolongeant les listes correspondantes de ce nœud ; soit un arbre du genre :

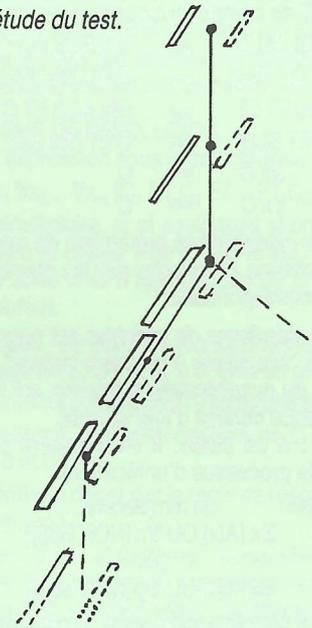


Rectitude du test : le test mène à CONTRADICTION si celle-ci apparaît sur toutes les feuilles de l'arbre.

En remontant des feuilles à la racine, on montre que les couples de listes d'expressions successifs ne peuvent être satisfaits.

Donc, si le test mène à CONTRADICTION, C est conséquence (logique) de H_1, H_2, \dots, H_k .

Complétude du test.



En descendant de la racine à une feuille, ou le long d'une branche infinie, les listes s'allongent.

Si les listes finales d'une branche peuvent être satisfaites, il en va de même de toutes celles des nœuds de cette branche, et en particulier de celles de la racine.

On obtient un "contre-modèle" au fait que C ne puisse qu'être vrai si H_1, H_2, \dots, H_k le sont ; C n'est donc pas conséquence (logique) de H_1, H_2, \dots, H_k .

Alors si C est conséquence (logique) de H_1, H_2, \dots, H_k , cela ne peut se produire ; le test conduit donc à CONTRADICTION.

Mais, si le contre-modèle ne s'obtient qu'à travers une infinité de démarches, la machine peut ne pas en rendre compte à l'issue de n'importe quel nombre fini d'étapes.

L'ALGORITHME DE RÉSOLUTION

comprend 3 éléments :

1. - Un Algorithme de normalisation-Skolemisation - réécriture de variables.

Normalisation : réduire à la forme normale conjonctive (conjonction de disjonctions d'expressions "de base" appelées "littéraux" par les informaticiens) une expression donnée (logiquement équivalente à sa "forme normale") consiste en une suite finie d'opérations du genre :

"remplacer $A \Rightarrow B$ par (NON-A) OU B"
 "remplacer (A ET B) OU C par (A OU C) et (B OU C)"

etc... ces opérations ne sont pas *spécifiques* à la méthode de résolution.

Même remarque en ce qui concerne les autres transformations constitutives de ce premier élément :

“circulation des quantificateurs” :

$$\forall x [A(x) \text{ ET } B(x)] \equiv (\forall x A(x)) \text{ ET } (\forall x B(x))$$

≡ signifie “est logiquement équivalent à”

$$\exists x [A(x) \text{ OU } B(x)] \equiv (\exists x A(x)) \text{ OU } (\exists x B(x))$$

et, si C ne comporte aucune occurrence de x,

$$\forall x [A(x) \text{ OU } C] \equiv (\forall x A(x)) \text{ OU } C$$

$$\forall x [C \text{ OU } B(x)] \equiv C \text{ OU } (\forall x B(x))$$

$$\exists x [A(x) \text{ ET } C] \equiv (\exists x A(x)) \text{ ET } C$$

$$\exists x [C \text{ ET } B(x)] \equiv C \text{ ET } (\exists x B(x))$$

$$\exists x C \equiv C$$

$$\forall x C \equiv C$$

“Ces équivalences permettent de remplacer les membres de gauche par les membres de droite correspondants”.

Les *réécritures de variables* ont pour but de rendre “inambigüe à première lecture” l’occurrence de quantificateur à laquelle est liée une occurrence donnée d’une variable.

(N.B. : à ce stade. Il en intervient d’autres dans le processus d’unification).

Exemple : on remplacera
 $\exists x [A(x) \text{ OU } \forall x [\text{NON } B(x)]]$
 par
 $\exists x [A(x) \text{ OU } \forall y [\text{NON } B(y)]]$

(dans la première expression, la dernière occurrence de x doit être comprise comme liée par le $\forall x$ et non par le $\exists x$).

L’effet voulu est atteint après un *nombre fini d’étapes*.

La *Skolemisation* consiste à substituer les occurrences d’une variable liée à un quantificateur existentiel par une fonction de Skolem ad hoc, portant en arguments les variables des quantifications universelles dont le champ d’action couvre ce quantificateur existentiel qui, lui, est supprimé.

Exemples.

$$\forall x \forall y \exists x A(x,y,z) \text{ devient } \forall x \forall y A(x,y,f(x,y))$$

$$\forall x \exists y \forall u \exists v A(x,y,u,v) \text{ devient } \forall x \forall u A(x,f(x),u,g(x,u))$$

$$\exists x \forall u \exists y \forall v A(x,y,u,v) \text{ devient } \forall u \forall v A(a,f(u),u,v)$$

Dans le dernier exemple, la constante a introduite selon la règle de constitution des tableaux joue le rôle de fonction de Skolem “ne dépendant d’aucun argument”.

Remarque : il faut que la règle “du nom nouveau” s’applique en matière de fonctions de Skolem ; par exemple la liste d’expressions

$$\forall x \forall y \exists z A(x,y,z) \quad \forall u \forall y \exists z B(x,y,z)$$

$$\forall x \forall y A(x,y, f(x,y)) \quad \forall u \forall y \exists (u,y,g(u,y))$$

le nom g donné à la fonction de Skolem utilisée pour transformer la seconde expression étant nécessairement distinct du nom f donné à la fonction de Skolem introduite pour transformer la première.

On rappelle que pour tester si C est conséquence d’hypothèses H_1, H_2, \dots, H_k , on teste si le système d’hypothèses $H_1, H_2, \dots, H_k, \text{NON-C}$ est contradictoire, ou s’il peut être satisfait.

Il revient au même de tester la conjonction $H_1, H_2 \text{ ET } \dots \text{ ET } H_k \text{ ET } (\text{NON-C})$

on part donc d’une situation initiale où cette conjonction est supposée vraie.

2^e élément : l’algorithme d’unification

3^e élément : la “*règle (d’inférence) de résolution*”

La première étape de normalisation-Skolemisation-réécriture livre une expression “*sous forme clause*”.

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_p [C_1 \text{ ET } C_2 \text{ ET } \dots \text{ ET } C_r]$$

quantificateurs dont l’écriture explicite n’est plus nécessaire

où chaque C_i est une *clause*, c’est-à-dire de la forme

$$L_1 \text{ OU } L_2 \text{ OU } \dots \text{ OU } L_{k_i} \quad 1 \leq k_i$$

où chaque L_j est un “*littéral*” ou expression de base” :

savoir, de l’une des formes $r(t_1, t_2, \dots, t_q)$ ou $\text{NON-}r(t_1, t_2, \dots, t_q)$,

où r est un symbole de relation à q arguments et les t_1, t_2, \dots, t_q des termes, savoir des représentations (noms) d’individus tels que $x, a, f(x,a)$, etc...

En quoi consiste l’unification de deux littéraux ?

(je dis deux, ici, pour simplifier, et à titre d’exemple ; on peut faire cela – et dans le test de résolution, il faut le faire –, pour toute une liste finie).

Il s’agit de substituer des termes aux variables qui figurent dans ces littéraux, de façon à obtenir le *même* résultat de substitution.

Ceci pose une condition : les littéraux à unifier doivent être, ou tous deux négatifs – c’est-à-dire commencer par NON –...– ou tous deux positifs, c’est-à-dire commencer par un symbole de relation, et il doit s’agir du même, puisque ce symbole n’entre pas dans le jeu des substitutions.

Il en est de même, d’ailleurs, du NON-initial dans le cas de deux littéraux négatifs, ce qui a pour conséquence que si nous savons unifier deux littéraux positifs, des formes, disons $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ et $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$, nous saurons aussi unifier les littéraux négatifs correspondants.

Dans ce qui précède, n est le nombre des arguments de r, et $t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des termes.

Soit x_1, x_2, \dots, x_m la liste des *variables* (individuelles) dont dépendent t_1 (ou) t_2 (ou)... (ou) u_1 (ou) u_2 (ou)... (ou) u_n , et v_1, v_2, \dots, v_m une liste de termes, de même longueur m.

La *substitution simultanée* de x_1 par v_1 (en toutes occurrences de x_1), de x_2 par v_2, \dots , de x_m par v_m , unifie $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ et $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$, si elle les transforme en le *même* littéral.

Exemple 7.

$r(x, f(u))$ et $r(g(x), z)$ sont unifiés en $r(g(y), f(u))$ par la substitution simultanée

$$\begin{cases} x \mapsto g(y) \\ y \mapsto y \\ z \mapsto f(u) \\ u \mapsto u \end{cases}$$

étapes de l’opération :

$$\begin{array}{ll} r(x, f(u)) & r(g(y), z) \\ x \mapsto g(y) & \\ r(g(y), f(u)) & r(g(y), z) \\ x \mapsto f(u) & \\ r(g(y), f(u)) & r(g(y), f(u)) \end{array}$$

Exemple 8.

$$r(f(x), \underset{\substack{\downarrow \\ \text{constante (non substituable !)}}}{a}, g(x,y)) \text{ et } r(y, z, g(a, f(z)))$$

sont unifiés en $r(f(a), a, g(a, f(a)))$ par la substitution simultanée

$$\begin{cases} x \mapsto a \\ y \mapsto f(a) \\ z \mapsto a \end{cases}$$

étapes de l’opération :

$$\begin{array}{ll} r(\underline{f(x)}, a, g(x,y)) & r(y, z, g(a, f(z))) \\ y \mapsto f(x) & \\ r(f(x), a, g(x, f(x))) & r(f(x), z, g(a, f(z))) \\ z \mapsto a & \\ r(f(x), a, g(x, f(x))) & r(f(x), a, g(a, f(a))) \\ x \mapsto a & \\ \text{donc} & \\ f(x) \mapsto f(a) & \\ r(f(a), a, g(a, f(a))) & r(f(a), a, g(a, f(a))) \end{array}$$

L’opération procède à partir du premier point de différence (termes soulignés) à partir de la gauche ; elle est mécanique ; et elle ne peut prendre plus d’un *nombre fini d’étapes*.

Un *exemple de littéraux non unifiables* a déjà été présenté dans le traitement de l’exemple 6.

Par *abus de langage*, on dit aussi que $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ et $\text{NON-}r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sont “*unifiés en des littéraux complémentaires*” par une substitution unifieuse de $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ et $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Règle de résolution.

Si les clauses C et C’ comportent des littéraux L_j et L_j , *unifiables en des littéraux complémentaires* par une substitution θ , la clause “résolvante” C” résultant, des transformées C θ et C’ θ de C et de C’ par θ , par *élimination des termes $L_j \theta$ et $L_j \theta$* et disjonction des termes restants, est conséquence (logique) des hypothèses C et C’.

Corollaire. Un système de clauses comportant C et C' est (logiquement) équivalent au système qui en résulte par adjonction de C".

(Ils sont simultanément satisfaits par les mêmes interprétations de leurs symboles non logiques, ou simultanément contradictoires).

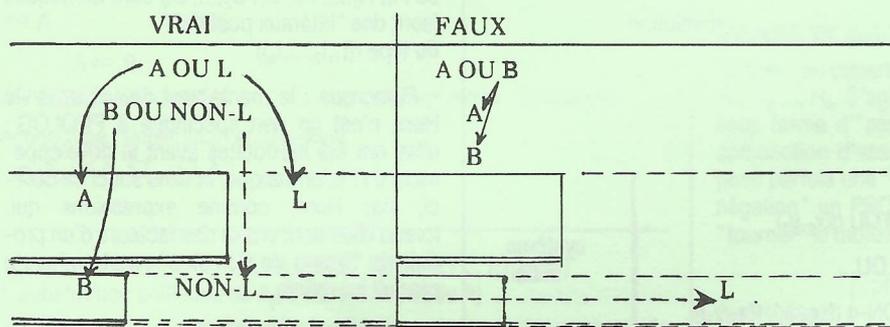
Preuve. (La conjonction étant commutative et associative, à équivalence logique près, on peut supposer que le système considéré commence par C et C' et que Γ est la conjonction des autres clauses qu'il comporte);

$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m [C \text{ ET } C' \text{ ET } \Gamma]$ admet $C \text{ ET } C' \text{ ET } \Gamma$ pour conséquence (logique), qui admet à son tour $C \text{ ET } C'$ pour conséquence (logique);

$C \text{ ET } C'$ aurait été astreinte au VRAI dans un tableau de Beth où $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m [C \text{ ET } C' \text{ ET } \Gamma]$ l'aurait été.

Compte-tenu de nos hypothèses, $C \text{ ET } C'$ (à équivalence logique près) de la forme A OU L et $C' \text{ ET } C$ de la forme B OU NON-L, pour $L = L_j \text{ ET}$ et $\text{NON-L} = L_j \text{ ET}$, et des disjonctions (peut être vides) de littéraux, A et B.

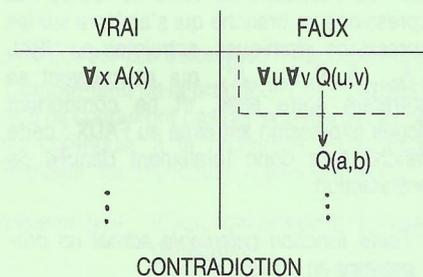
Or (A OU L) ET (B OU NON-L) admet à son tour A OU B pour conséquence logique :



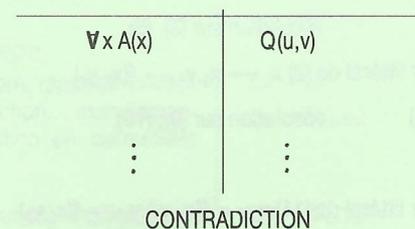
Pour justifier l'adjonction de C" aux clauses antérieurement présentes, il faut justifier l'extension implicite de la quantification universelle aux variables qu'elle comporte (lemme 1) et l'innocuité (du point de vue qui nous occupe) de l'adjonction d'une conséquence logique (lemme 2).

Lemme 1. - ("exemplifié" en ce qui concerne les nombres de variables, supposé égaux à 2 et à 1). Si Q(u,v) est conséquence (logique) de $\forall x A(x)$, il en va de même de $\forall u \forall v Q(u,v)$.

Preuve. Appliquons le test de Beth :

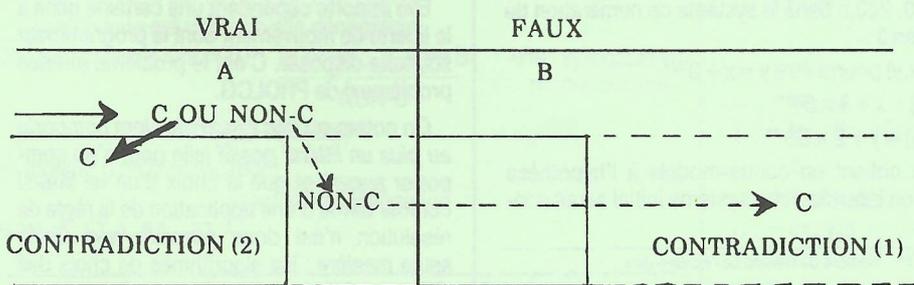


car, à l'écriture près, ce tableau reproduit le



qui mène à CONTRADICTION, par hypothèse.

Lemme 2. - Supposons C conséquence logique de A (ce que nous appellerons "contradiction (1)"). Alors, B est conséquence logique de A, si et seulement si B est conséquence logique des hypothèses A et C.



Preuve. Il est évident que si B est conséquence logique de A, il en est aussi une des hypothèses A et C (on peut tenir le même raisonnement dans le second cas que dans le premier).

Si B est conséquence logique des hypothèses A et C (ce que nous appellerons "contradiction (2)"), on peut développer ainsi qu'il suit un tableau de Beth pour établir que B est conséquence logique de A : (voir tableau bas de page)

Car, étant valide, l'expression C OU NON-C peut être adjointe aux expressions astreintes au VRAI, quelle que soit l'interprétation cherchée.

THEOREME DE RESOLUTION

L'expression sous forme clauseuse

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m [C_1 \text{ ET } C_2 \text{ ET} \dots \text{ ET } C_n]$$

est contradictoire, si et seulement si on peut en déduire la clause vide (CONTRADICTION) par une suite finie d'applications de la règle de résolution.

Remarque. Du point de vue algorithmique : le passage de C, C', L_j, L_j' à C" met en œuvre :

- l'algorithme d'unification (recherche de θ)
- l'algorithme de transformation de C et C' en C θ et C' θ
- l'algorithme décrit par la règle de résolution pour écrire C",

précédés d'un algorithme, inessentiel du point de vue théorique, mais important du point de vue de l'économie de fonctionnement du logiciel, pour le choix de C, C', L_j et L_j'.

Le facteur de "bouclage" éventuel réside dans la possibilité d'une succession infinie d'applications de la règle de résolution.

Esquisse de preuve du théorème.

1. RECTITUDE DE L'ALGORITHME DE RESOLUTION :

s'il mène à CONTRADICTION, le système d'hypothèses initial était bien contradictoire.

Preuve : on aurait écrit dans un tableau de Beth, "enrichi" par l'adjonction, de temps en temps, de conséquences logiques de certaines des expressions antérieurement astreintes au VRAI, toutes les expressions que l'algorithme amène à écrire, et une bien plus grande quantité d'autres encore.

Mais si CONTRADICTION a été trouvée avec peu d'expressions (relativement), elle le sera encore avec toutes.

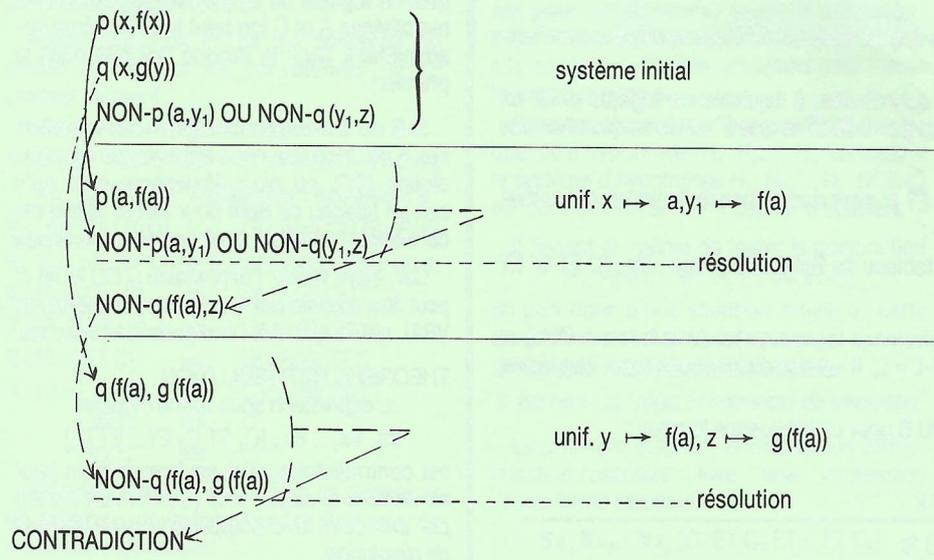
2. COMPLÉTUDE DE L'ALGORITHME DE RESOLUTION :

si le système initial était contradictoire, il conclut à CONTRADICTION en temps fini.

Preuve. il revient au même de voir que s'il ne conclut pas à CONTRADICTION, il bâtit une "base de données" qui satisfait aux hypothèses testées.

Le principe de la preuve réside dans une extension (que nous ne développerons pas) de ce que l'on va faire sur l'exemple n° 11 ci-après.

Exemple 9.



tradictoire ; c'est-à-dire un modèle réalisant les expressions constituant ce système ; un modèle où $p(x, f(x))$ est vrai, ainsi que $NON-p(g(y), y)$.

Application au langage PROLOG

Une clause est dite "de Horn" si elle est de l'une des formes :

$(NON-A_1) \text{ OU } (NON-A_2) \text{ OU } \dots \text{ OU } (NON-A_n)$
 "dénégation"

(à équivalence logique près :
 $NON-(A_1 \text{ ET } A_2 \text{ ET } \dots \text{ ET } A_n)$)
 "assertion"

A
 $A \text{ OU } (NON-B_1) \text{ OU } (NON-B_2) \text{ OU } \dots$
 $\dots \text{ OU } (NON-B_m)$
 "implication"

(à équivalence logique près :
 $A \Leftarrow (B_1 \text{ ET } B_2 \text{ ET } \dots \text{ ET } B_m)$)
 où $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ sont atomiques (sont des "littéraux positifs", du type $r(t_1, t_2, \dots, t_q)$)

Remarque : le maniement des clauses de Horn n'est en rien spécifique à PROLOG ; elles ont été introduites avant le développement de l'informatique, et sans souci de celle-ci, par Horn, comme expressions qui, lorsqu'elles sont vraies des facteurs d'un produit de "bases de données", sont vraies du produit lui-même.

Nous citerons deux propriétés des clauses de Horn :

1. *Aucun ensemble d'assertions et d'implications ne peut être contradictoire.*

Preuve. Soient A_1, A_2, \dots, A_h les assertions, et $A'_1 \Leftarrow B_1, A'_2 \Leftarrow B_2, \dots, A'_k \Leftarrow B_k$ des implications (où B_1, B_2, \dots, B_k sont des conjonctions d'atomes).

Il y aura dans le tableau de Beth formé à partir de l'astreinte au VRAI de toutes ces expressions un branche qui s'arrêtera sur les expressions atomiques, astreintes au VRAI, $A_1, A_2, \dots, A_h, A'_1, A'_2, \dots, A'_k$, qui ne peuvent se contredire entre elles, et ne comportant aucune expression astreinte au FAUX : cette branche sera donc totalement dénuée de contradiction.

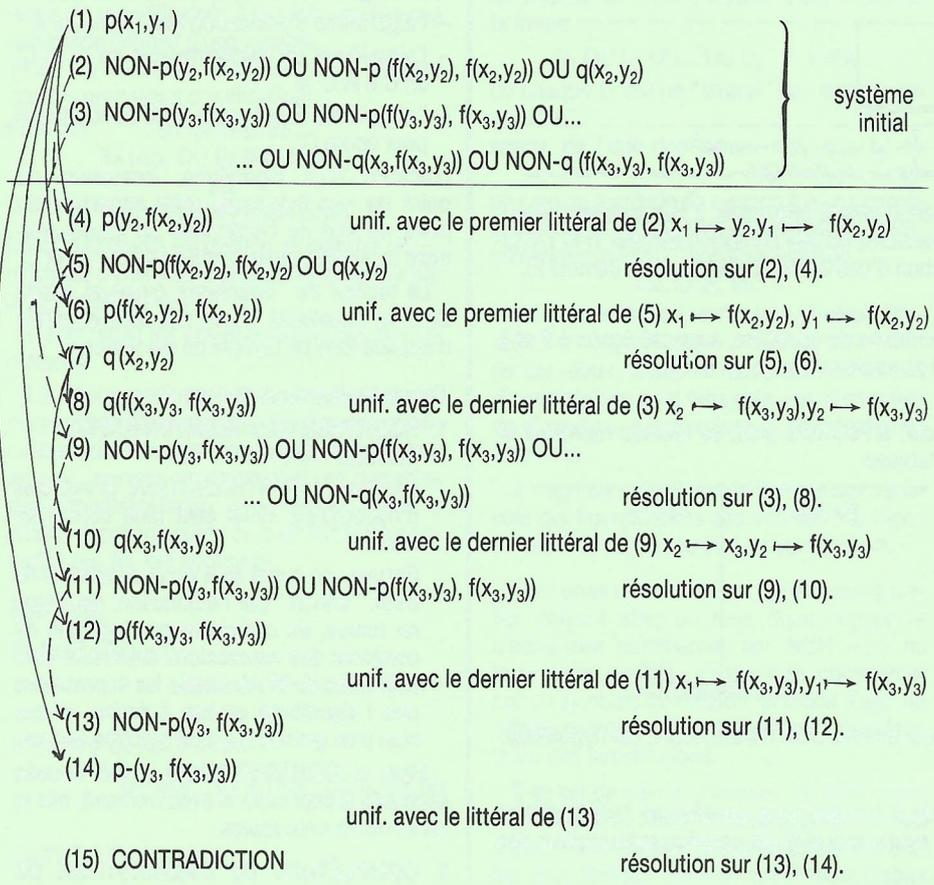
2. *Toute fonction calculable admet un programme en clauses de Horn.*

Nous ne pouvons ici esquisser de preuve de ce fait : il a pour conséquence que la restriction aux clauses de Horn n'apporte aucune restriction aux capacités en calculs mathématiques.

Elle apporte cependant une certaine gêne à la liberté de mouvement dont le programmeur souhaite disposer. C'est le problème (un des problèmes) de PROLOG.

On notera qu'une clause de Horn comporte au plus un littéral positif (elle peut n'en comporter aucun) et que le choix d'un tel littéral comme terme d'une application de la règle de résolution n'est donc possible que d'une seule manière ; les algorithmes de choix des clauses à "résoudre" en seront donc simpli-

Exemple 10.



Exemple 11. - On a vu (exemple 6) que $p(x, f(x))$ et $NON-p(g(y), y)$ ne sont pas unifiables.

Soit 0 le nom de code d'un individu dans une base de données mathématiques ; rien ne nous dit que les individus dénommés $f(0), g(0), f(f(0)), g(g(0)), f(g(0)), g(f(0)), \dots$ soient les mêmes.

Imaginons que ce sont respectivement les nombres représentés par 10, 20, 110, 220,

120, 220... dans le système de numération de base 3 :

$p(x, y)$ pourra être $y = x + 3^{Nx}$
 $f(x) = x + 1 \times 3^{Nx}$
 $g(y) = y + 2 \times 3^{Ny}$

On obtient un contre-modèle à l'hypothèse selon laquelle notre système initial serait con-

* 3^{Nx} : Nombre de chiffres de l'écriture de x .
 ** 3^{Ny} : Nombre de chiffres de l'écriture de y .

Un autre avantage de l'usage des clauses de Horn, c'est l'existence d'une interprétation *procédurale* de celles-ci.

Les implications : $A \text{ Si } B_1, B_2, \dots, B_m$ et assertions : A seront vues comme des *procédures* pour A (de tête A , et de corps B_1, B_2, \dots, B_m dans le premier cas), et les dénégations, comme des *appels de procédures* :

? A_1, A_2, \dots, A_n
 (demandant si A_1, A_2, \dots, A_n sont conséquences, on ajoute la dénégation de leur conjonction pour montrer qu'elle est contradictoire : ceci sera vu comme un appel des procédures A_1, A_2, \dots, A_n).

Exemple 12. Exécution du programme.

? fact (3,z)
 fact (0,1)
 (1) fact (x,y) si fact (x-1,y') = x*y'
 table de multiplication (par exemple)

1. en procédure "descendante"

x : = 3
 ? fact (2,y'), z = 3*y'
 y : = z dans (l)
 appel en attente.
 x : = 2
 y : = y'
 y' réécrit y" dans (l)
 x : = 1
 y : = y"
 y' réécrit y"" dans (l)
 y"" : = 1
 ? fact(0,y""), z = 3*y', y' = 2*y", y"" = 1*y""
 appel en attente
 ? z = 3*y', y' = 2*y", y"" = 1*1
 1 = 1*1 consultation de la table ou invocation de la procédure de multiplication
 ? z = 3*y', y' = 2*1
 2 = 2*1
 ? z = 3*2
 6 = 3*2
 z : = 6
 CONTRADICTION
 (rappel : ? A indique l'ajout de l'hypothèse NON-A)

2. en procédure "ascendante"

(x : = 1
 y' : = 1
 fact(1,y) Si y = 1*1
 1 = 1*1
 fact (1,1)
 y : = 1
 (x : = 2
 y' : = 1
 fact (2,y) Si y = 2*1
 2 = 2*1
 fact (2,2)
 y : = 2
 (x : = 3
 y' : = 2
 fact (3,y) Si y = 3*2
 6 = 3*2
 fact (3,6)
 z : = 6
 CONTRADICTION

BIBLIOGRAPHIE

Manuels :

- [1] C.J. HOGGER : "Programmation en Logique" - Masson, Paris 1987.
- [2] Z. MANNA : "Mathematical Theory of Computation" - Mc Graw Hill, New-York 1974.

Textes originaux :

- [3] E.W. BETH : "The Foundations of Mathematics" - North Holland, Amsterdam 1959.
- [4] G. GENTZEN : "Untersuchungen über das logische Schliessen" "Mathematische Zeitschrift" - 39, pp. 176-210, 405-431 (1934) Traduction Française par R. FEYS et J. LADRIERE, "Recherche sur la déduction Logique" - Paris 1955.
- [5] J.A. ROBINSON : "A machine oriented Logic based on the Resolution Principe," "Journal of the Association for Computing Machinery" - 12 (1), pp. 23-41 (1965)

Si vous désirez recevoir des tirés à part de ce supplément consacré à la recherche en mathématiques à l'Université Blaise-Pascal, veuillez-vous adresser à :
ADASTA - U.F.R. Sciences, B.P. 45 - 63177 AUBIERE CEDEX

L'ADASTA publie également un supplément pédagogique. Au sommaire du numéro 3 :

- **Considération sur le choix d'un potentiomètre,**
par G. Ferrachat
- **Mesure des résistances à l'aide d'un amplificateur opérationnel,**
par G. Dépreux
- **Utilisation d'un circuit résonant RLC**
Variation de la résistance d'une bobine avec la fréquence
- **Mesure de la résistance d'un voltmètre, d'un galvanomètre, d'une pile...**
par R. Jouanisson
- **Questions et réponses,**
par G. Ferrachat, G. Hatab et R. Jouanisson

APPLICATION D'UN ALGORITHME STOCHASTIQUE D'OPTIMISATION A LA RESTAURATION DES IMAGES

par P.L. Hennequin*

Il est difficile d'introduire un non spécialiste de plain pied dans la recherche mathématique et l'on doit saluer les tentatives récentes ([1] et [2]) pour populariser cette science en France.

Nous nous proposons ici fort modestement de montrer sur un exemple simple comment la résolution d'un problème concret, celui de la restauration des images brouillées qui intéresse de nombreuses disciplines (médecine, écologie, météorologie...) amène à utiliser des outils mathématiques puissants développés dans un autre contexte, celui de la mécanique statistique, et à réaliser les calculs en un temps réaliste grâce aux performances actuelles des ordinateurs et à leur parallélisation.

La méthode a été développée à l'initiative de D. GEMAN aux USA [3] et de R. AZENCOTT en France [4] et [5]. On trouvera une étude détaillée de certaines questions qu'elle pose dans [6]. Les applications à des images seront empruntées à [7]. Nous remercions C. BONNE-MOY pour son aide dans cette conférence.

1. Optimisation sur un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini et H une application de Ω dans \mathbb{R} .

Soit $\Omega_{\min} = \{y \in \Omega / H(y) \leq H(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \Omega\}$ l'ensemble des points de Ω où H est minimum. Minimiser H sur Ω c'est trouver un point de Ω_{\min} et la valeur de H en ce point.

A priori un algorithme exhaustif consiste à numéroter les points de $\Omega = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ puis à calculer pour $1 \leq n \leq N-1$ le couple (y_n, z_n) avec $y_n = H(x_n), z_n = x_n$ et

$$y_{n+1} = \min(H(x_{n+1}), y_n),$$

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n & \text{si } y_n \leq H(x_{n+1}) \\ x_{n+1} & \text{si } H(x_{n+1}) < y_n \end{cases}$$

alors z_N est un point de Ω_{\min} . La longueur, donc le coût, du calcul est proportionnelle à $N = \text{card}(\Omega)$ qui peut être beaucoup trop grand (cf ci-dessous le cas des images) pour que cet algorithme soit pratiquement utilisable.

Souvent Ω est muni d'une structure de "voisinages" : à chaque point x de Ω on associe un ensemble $V(x)$ de voisins ; on peut alors chercher à construire une suite $[X^i]$ de points de Ω telle que, pour tout i :

$$X^{i+1} \in V(X^i) \text{ et } H(X^{i+1}) < H(X^i)$$

cet algorithme, dit de **descente** s'arrête pour $i = n$ si X^n est un minimum local de H . Malheureusement H peut posséder de nombreux minima locaux, fort éloignés des minima globaux cherchés. (cf Fig. 1).

Une troisième famille d'algorithmes fait appel au calcul des probabilités. On parle alors d'algorithme **stochastique**.

Définir une probabilité P sur l'ensemble Ω c'est associer à chaque point x de Ω sa probabilité $P(x)$ de sorte que

$$P(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_x P(x) = 1$$

La mécanique statistique suggère d'associer à la fonction H donnée sur Ω (qui s'interprète alors comme l'énergie de la configuration x) et à un paramètre positif T appelé température, la probabilité dite de **Gibbs** définie sur Ω par

$$G_T(x) = \frac{e^{-\frac{H(x)}{T}}}{\sum_{z \in \Omega} e^{-\frac{H(z)}{T}}}$$

On vérifie sans peine que toute fonction H définit une probabilité G_T et qu'inversement G_T détermine H à l'addition d'une constante près. La famille $(G_T)_{T > 0}$ possède la propriété suivante :

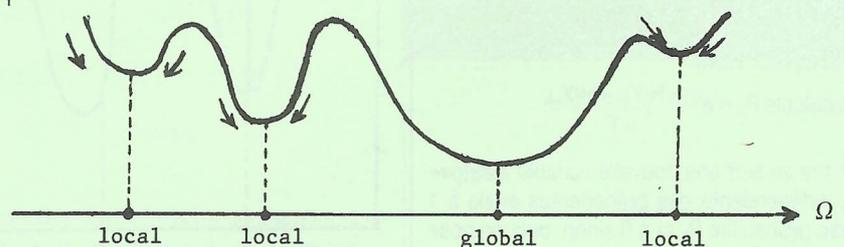
quand on fait tendre T vers 0 (refroidissement) G_T se concentre sur Ω_{\min} . En effet soit H_0 la valeur de H sur Ω_{\min} , on peut écrire :

$$G_T(x) = \frac{e^{-\frac{H(x) - H_0}{T}}}{\sum_{z \in \Omega_{\min}} e^{-\frac{H(z) - H_0}{T}} + \sum_{z \notin \Omega_{\min}} e^{-\frac{H(z) - H_0}{T}}} = \frac{e^{-\frac{H(x) - H_0}{T}}}{\text{Card } \Omega_{\min} + \sum_{z \notin \Omega_{\min}} e^{-\frac{H(z) - H_0}{T}}}$$

et en utilisant $e^{-\infty} = 0$ et $e^0 = 1$ on obtient $\lim_{T \rightarrow 0} G_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega_{\min} \\ \frac{1}{\text{Card } \Omega_{\min}} & \text{si } x \in \Omega_{\min} \end{cases}$

d'où l'idée de l'algorithme : si nous savons, pour T assez petit, simuler une variable aléatoire de loi G_T sur Ω , il est très probable que ses valeurs appartiennent à Ω_{\min} .

Figure 1



* P.L. HENNEQUIN, Professeur de Mathématiques Appliquées - Université Blaise-Pascal.

2. Simulation d'une variable aléatoire de loi G_T

La simulation **directe** nécessiterait le calcul des nombres $G_T(x)$ et du dénominateur

$$\sum_{z \in \Omega} e^{-\frac{H(z)}{T}}$$

soit card Ω opérations, nombre inaccessible en pratique. On emploie donc une voie détournée suggérée par la mécanique statistique.

Remarquons que

$$\frac{G_T(x')}{G_T(x)} = e^{-\frac{H(x') - H(x)}{T}}$$

ne dépend que de la valeur de H en x et x' et que ce rapport est compris entre 0 et 1 si $H(x') > H(x)$.

Donnons nous alors une fonction positive Π sur $\Omega \times \Omega$ telle que, pour tout x

$$\sum_{x' \in V(x)} \Pi(x, x') = 1 ;$$

$$\text{que } \Pi(x, x') = \Pi(x', x)$$

$$\text{et que } \Pi(x, x') = 0 \text{ si } x' \notin V(x)$$

(On dit que Π est une matrice de transition symétrique).

Associés à Π , H et T la fonction Π_T^H définie par : si $x \neq x'$,

$$\Pi_T^H(x, x') = \begin{cases} \Pi(x, x') \text{ si } H(x') \leq H(x) \\ \Pi(x, x') \frac{G_T(x')}{G_T(x)} \text{ si } H(x') > H(x) \end{cases}$$

$$\Pi_T^H(x, x) = 1 - \sum_{x' \neq x} \Pi_T^H(x, x')$$

Soit (X^n) une **chaîne de Markov** de transition Π_T^H sur Ω , c'est-à-dire que la probabilité conditionnelle de $X^{n+1} = x'$ sachant $X^1, X^2, \dots, X^n = x$ est égale à $\Pi_T^H(x, x')$; alors on montre que pour tout x de Ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X^n = x) = G_T(x);$$

$n \rightarrow \infty$

autrement dit, si on laisse la chaîne évoluer assez longtemps, X_n aura pratiquement la loi G_T .

La construction de la suite (X^n) s'effectue suivant l'algorithme ci-dessous du à Métropolis : connaissant X^n , on tire d'abord Y suivant la loi $\Pi(X^n, \cdot)$ puis on calcule $H(Y)$;

$$\text{Si } H(Y) \leq H(X_n), \text{ on pose } X_{n+1} = Y$$

$$\text{Si } H(Y) > H(X_n)$$

$$\text{on calcule } P_T = e^{-\frac{H(Y) - H(X_n)}{T}}$$

on tire au sort une nouvelle variable aléatoire Z_n indépendante des précédentes égale à 1 avec probabilité P_T et à 0 sinon, puis on pose

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y \text{ si } Z = 1 \\ X_n \text{ si } Z = 0 \end{cases}$$

On remarque que $p_T \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow 0$; quand T est petit la méthode est pratiquement une méthode de descente mais pour T grand on accepte de remonter avec la probabilité p_T ce qui permet de "sortir" d'un minimum local de H.

3. Refroidissement et recuit.

Rassemblant les résultats précédents, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(X^n \in \Omega_{\min}) \right] \\ = \lim_{T \rightarrow 0} G_T(\Omega_{\min}) = 1 \end{aligned}$$

L'idée nouvelle de ce paragraphe consiste à faire varier **simultanément** T et n donc à introduire une suite (T_n) convergeant vers 0.

L'algorithme précédent est donc modifié en utilisant à l'étape n la probabilité p_{T_n} au lieu de p_T ; il prend alors le nom de "recuit simulé". On a le résultat qualitatif suivant : si $T_n \rightarrow 0$ assez lentement alors $P_{T_n}(X^n \in \Omega_{\min}) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$. Il est intuitif qu'un refroidissement trop rapide risque de bloquer X_n en un minimum local. Par contre, un refroidissement trop lent ralentit la convergence de X_n . Le mot "recuit" est traduit de l'anglais "annealing" qui signifie exactement "refroidissement ralenti".

4. Vitesse de refroidissement

Précisons le résultat annoncé plus haut : Geman et Hajek ont montré que pour qu'il y ait convergence il suffisait que, pour tout n,

$$T_n > \frac{K}{\log n} \text{ pour un K convenable.}$$

Pour exprimer le K optimal il faut introduire pour chaque y de Ω minimum local la quantité Dy , remontée minimale de H nécessaire pour passer de y à un point z tel que $H(z) < H(y)$ (cf. Fig. 2).

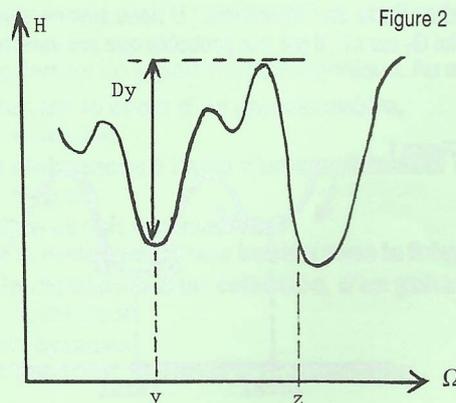


Figure 2

Alors le K le plus petit est donné par :

$$K_0 = \sup_{y \notin \Omega_{\min}} [Dy / y \text{ minimum local}]$$

Chiang et Chow ont amélioré ce résultat à l'aide des quantités suivantes : nous disons que x et y **communiquent au niveau h** si et seulement si

$$\text{ou bien } \begin{cases} Y = x \text{ et } H(x) \leq h \\ \text{il existe une "chaîne" } x_1, \dots, x_k \\ \text{telle que } x_1 = x, x_k = y; \text{ et pour} \\ \text{tout } j, x_{j+1} \in V(x_j) \text{ et } H(x_j) < h \end{cases}$$

Posons $h_{xy} = \inf [h/x \text{ et } y \text{ communiquent au niveau } h]$

$$\bar{R} = \sup [h_{xy} - H(x)/x, y \in \Omega_{\min}],$$

et $R = \max(\bar{R}, K_0)$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(X^n = x))$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pour tout } x \notin \Omega_{\min} \\ > 0 \text{ pour tout } x \in \Omega_{\min} \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{R}{T_n}\right] = +\infty$$

5. Images

Une image rectangulaire (photographie ou écran de télévision) est un réseau S de points lumineux appelés **pixels**. En chaque point s de S on a une intensité lumineuse, ou un niveau de gris, ou une couleur notée x_s , prenant ses valeurs dans un ensemble fini Λ . Par exemple, pour une image de qualité moyenne, on a card $\Lambda = 16$ et card $S = 256 \times 256 = 65536$; l'ensemble $\Omega = \Lambda^S$ de toutes les images possibles a alors pour cardinal 16^{65536} et on comprend le caractère inapplicable du premier algorithme au paragraphe 1.

Pour caractériser les propriétés statistiques de la famille d'images sur laquelle on travaille, on choisit une probabilité P sur l'ensemble Ω de toutes les images possibles, définie par l'intermédiaire d'une fonction H_0 qui sera précisée au paragraphe suivant :

$$P(\{x\}) = \frac{e^{-H_0(x)}}{\sum_{\alpha \in \Omega} e^{-H_0(\alpha)}}$$

On suppose observée, non pas l'image X mais une image brouillée Y déduite de X par l'addition d'un bruit Z :

$$Y = X + Z,$$

c'est-à-dire qu'en chaque pixel on a $Y_s = X_s + Z_s$ pour une addition convenablement définie sur Λ pour en faire un groupe (par

exemple, l'addition modulo 16 si $\Lambda = [0, \dots, 15]$.

On suppose les variables aléatoires X et Z indépendantes et la loi Q de Z définie à partir d'une fonction K sur Ω comme P l'est à partir de H_0 .

Alors la loi du couple (X, Z) est donné par

$$P(X=x, Z=z) = \frac{e^{-(H_0(x) + K(z))}}{\sum_{\alpha, \beta} e^{-(H_0(\alpha) + K(\beta))}}$$

tandis que la loi de X conditionnée par Y est donné par

$$P(X=x / Y=y_0) = \frac{e^{-(H_0(x) + K(y_0-x))}}{\sum_{\alpha} e^{-(H_0(\alpha) + K(y_0-\alpha))}}$$

D. Geman propose, au vu de l'observation $Y = y_0$ de choisir comme "image restituée" la valeur de x qui maximise cette probabilité conditionnelle ce qui revient à minimiser l'application

$$x \rightarrow H(x) = H_0(x) + K(y_0 - x)$$

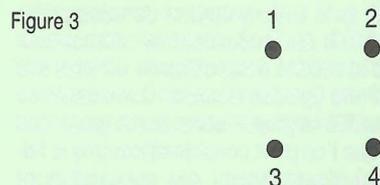
le premier terme, $H_0(x)$, de cette somme est d'autant plus petit que l'image x est régulière, le second que x est plus voisin de y_0 .

6. Caractérisation de la régularité de l'image.

Précisons maintenant comment choisir la fonction H_0 c'est-à-dire comment associer à chaque image x un nombre $H_0(x)$ qui sera d'autant plus petit que l'image sera plus "régulière". Le choix de H_0 sera guidé par le type de structure (texture) à reconnaître.

Il n'est pas possible ici de rentrer dans les détails et nous nous contenterons d'un exemple effectivement développé à l'Université Blaise Pascal par C. Bonnemoy (cf [7]) en suivant B. Prum [8].

Considérons les sous-ensembles $C_{i,j}$ de S formé des quatre points voisins $(i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)$, avec $0 \leq i \leq 254, 0 \leq j \leq 254$ (cf Fig. 3).



Soit \mathcal{C} l'ensemble des $C_{i,j}$. En s'inspirant de la mécanique statistique, on choisit

$$H_0(x) = \sum_{C \in \mathcal{C}} V_C(x), \text{ où } V_C(x) \text{ ne dépend que des}$$

valeurs x_s pour $s \in C$.

Alors si x et x' ne diffèrent qu'en un site s_0 , on a

$$H_0(x) - H_0(x') = \sum_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ s_0 \in C}} (V_C(x) - V_C(x_0))$$

somme qui contient au plus quatre termes et se calcule donc très rapidement.

Précisons le choix V_C en numérotant 1, 2, 3, 4 les points de C (cf Fig. 3) et x_1, x_2, x_3, x_4 les valeurs de x en ces points.

$$V_C(x) = \lambda [(x_1 - x_2)^2 + x_3 - x_4]^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + \mu [\alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta]$$

Le premier terme est nul si est seulement si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ et petit si les x_i sont peu différents. Le second terme prend en compte les contours séparant les différentes zones de même éclairciment. Pour cela on définit les quatre fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de (x_1, x_2, x_3, x_4) par

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \neq x_3 = x_4 \\ & \text{ou } x_1 = x_3 \neq x_2 = x_4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si trois des } x_i \text{ sont égaux} \\ & \text{et le quatrième différent} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si deux des } x_i \text{ d'une même ligne} \\ & \text{ou d'une même colonne sont} \\ & \text{égaux et les deux autres} \\ & \text{différents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si les } x_i \text{ sont distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ permettent de prendre en compte les morceaux de contours décrits respectivement (à une rotation près) figure 4.

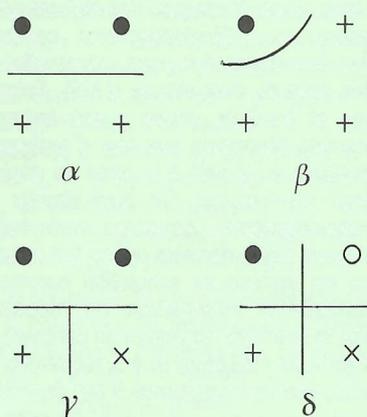


Figure 4

Le choix des coefficients de pondération 1, 2 et 3 privilégie les contours les plus simples.

7. Exemple.

On est parti ici d'une image définie algorithmiquement représentant une sphère. Chaque point a été perturbé indépendamment des autres : avec une probabilité 0,5 on a changé la valeur du pixel et on a alors choisi au hasard une des 15 valeurs possibles.

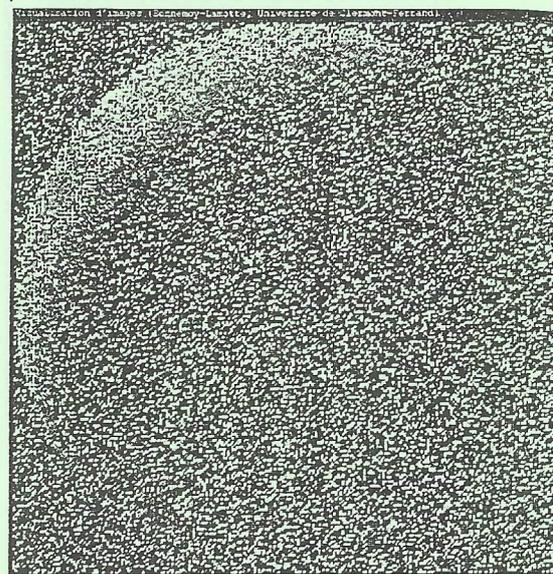


Image perturbée

Figure 5

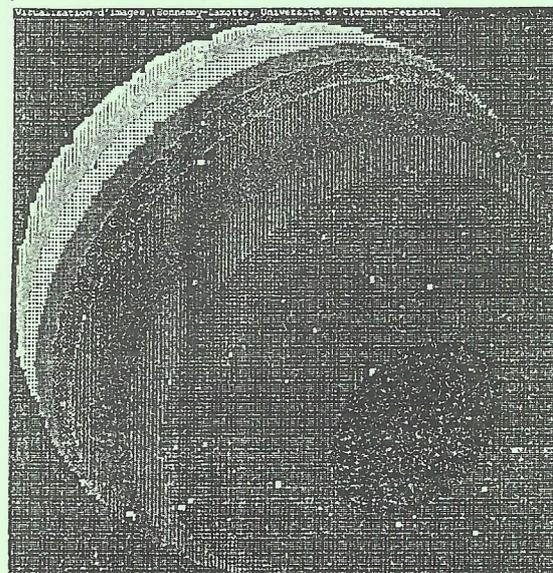


Image restaurée

Figure 6

La figure 5 présente l'image perturbée et la figure 6 l'image restaurée après avoir utilisé pendant trente minutes un programme implanté sur le SUN 3/260 de notre département.

On a choisi :

- la fonction H_0 du paragraphe 6 avec $\gamma = 0,5$ et $\mu = 7$
- $K(z)$ égal à 30 fois le nombre de sites s pour lesquels $z_s = 0$
- la température au pas n , $T_n = \frac{30}{\text{Log}(1+n)}$

L'algorithme est une variante de celui décrit au paragraphe 2 : au lieu d'utiliser la chaîne de Markov gouvernée par II , on balaye systématiquement et périodiquement l'image et, à chaque pas on la modifie aléatoirement en un seul pixel. On choisit l'image ainsi modifiée ou l'ancienne suivant l'algorithme de Métropolis.

Conclusion.

Nous n'avons pu dresser ici un inventaire ni de tous les raffinements techniques utilisés ni de toutes les questions qui se posent mais simplement mettre en évidence la rencontre fructueuse d'outils mathématiques et de moyens techniques pour la résolution d'un problème crucial dans une civilisation de l'image.



RÉFÉRENCES

- [1] TANGENTE, "Magazine mathématique pour les collèges et lycées" - (11 numéros parus depuis 1987).
- [2] MATHÉMATIQUES A VENIR, (Colloque de Palaiseau - 8/10 déc. 87) - Bull SMF Tome 115 1987.
- [3] D. GEMAN, "Random Fields and Inverse problems in Imagery" - Cours à l'école d'été de calcul de St-Flour 1988 (Sous Presse).
- [4] R. AZENCOTT, "Algorithmes de recuit en imagerie" Gazette des mathématiques n° 31 (1986), p. 158-173
- [5] R. AZENCOTT, "Simulated annealing" Séminaire Bourbaki 1987-1988 n° 697 p. 223-237.
- [6] Agrégation de Mathématique - Session 1988 - Epreuve de calcul des probabilités (Rapport publié par le CNDP).
- [7] J.L. LAMOTTE, "Restauration des images par la méthode du recuit" - Rapport de D.E.A. Informatique Université Blaise-Pascal, 1989.
- [8] B. PRUM, "Processus sur un réseau et mesures de Gibbs" - Masson 1986.

MODÈLES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCONOMIE UNE APPROCHE NON PARÉTIENNE DE LA NOTION D'ÉQUILIBRE

par Alain Quilliot*

I. Il a fallu attendre la fin de la deuxième guerre mondiale et les travaux de J. Von Neuman et D. Morgenstern pour voir la communauté Mathématiques s'intéresser à l'économie. À partir de cette époque, plusieurs lignes de recherche furent envisagées :

- Celle de l'Économétrie, c'est-à-dire de la conception et mesure d'indices descriptifs d'une situation économique ; cette orientation implique une utilisation intense d'outils statistiques et a acquis ses lettres de noblesses avec notamment les travaux menés par R. Frisch, prix Nobel d'économie en 1973 ; l'objectif sous-jacent est de se doter d'outils d'analyse à court terme, susceptible d'aider à la prise de décision. La technique même de base qui consiste à extrapoler les données les plus récentes implique que l'impasse est faite sur la recherche des causalités et des mécanismes profonds de l'économie.
- Celle de la simulation. Les systèmes économiques étant extraordinairement complexe du fait de leur taille, de leur composition même (matière vivante), de l'importance prépondérante de l'aléatoire (catastrophes naturelles, événements politiques), on peut songer à substituer à l'étude mathématiques à peu près impossible à réaliser de manière opérationnelle, la simulation par voie informatique de différents scénarios. Une telle approche, qui sert de justification à l'introduction par J. Von Neuman des automates cellulaires, fut reprise par les membres du Club de Rome au cours de leur étude sur la croissance zéro (1970), puis par V. Léontieff dans le cadre d'une étude pour les Nations Unies relative aux développements comparés des économies des pays industrialisés et des pays du tiers monde (1979). Entreprises et Instituts divers y ont fortement recours désormais aux fins d'analyse de marchés ou d'aide à la prise de décision (jeux d'entreprise). On peut simuler des comportements d'équations macroéconomiques. Cette dernière option fait apparaître les techniques simulation comme un complément informatique de l'économétrie, la première renvoyant au contraire à la théorie de l'équilibre et à la recherche des mécanismes fondamentaux de l'économie.
- La théorie de l'équilibre : l'objectif ici n'est plus de se doter d'instruments de prévision, mais simplement de mettre en évi-

dence certains mécanismes régissant le fonctionnement des systèmes économiques. Si le suisse Walras peut être considéré comme le précurseur dès la fin du siècle passé de la notion d'équilibre concurrentiel, J. Von Neuman et O. Morgenstern (la théorie des jeux), K. Arrow, M.G. Debreu (respectivement prix Nobel 1972 et 1983) furent ceux qui justifiaient véritablement le concept en termes mathématiques. En dépit de leurs efforts, la nature des résultats dégagés, en même temps que les modèles introduits apparaîtront décevants au lecteur tant ils semblent en effet éloignés de toute interprétation plausible du réel. Rarement en effet les marchés considérés sont-ils autre chose qu'un groupe d'agents échangeant des biens en toute information, sans autre contrainte à satisfaire que celle de l'optimisation de leur consommation en tenant compte de leur revenu. Aussi bien temps, qu'accidents, que relations de force ou d'influence, que superposition de différents marchés (boursier, monétaire, biens et services, etc), ne sont que très rarement pris en compte. Et pourtant ces modèles très simplifiés sont-ils déjà très difficiles à manipuler d'un point de vue mathématiques.

Que les mathématiciens se soient tenus très majoritairement à l'écart du champ d'investigation ouvert par l'analyse économique, alors même que ce champs paraissait malgré tout très riche, ne tient pas simplement à la taille et à la complexité des problèmes posés. Contrairement à la physique ou à la chimie, les sciences économiques ne sont en effet pas neutres. Le lien étroit qu'elles entretiennent avec la politique en ont souvent fait un espace de recherche quelque peu hasardeux, propre à rebuter plus d'un chercheur. Les récompenses mêmes qui ont pu parfois être attribuées aux théoriciens de l'économie mathématiques devaient sans doute parfois moins à la finesse de leurs résultats qu'à l'interprétation de ceux-ci (de façon parfois douteuse) comme "démonstration" de la validité des politiques les plus à la mode à une époque donnée. Cette absence de neutralité explique sans doute pour une part ce que l'on peut considérer comme la faible degré d'avancement des connaissances courantes relatives aux lois de fonctionnement des systèmes économiques. Si l'on peut en effet admettre par exemple qu'il était difficile de prévoir le Krack boursier de 1987 ou l'explosion au début des années 80 de la dette extérieure des pays du tiers monde, on pourra en revanche s'étonner de ce que personne ne soit en mesure de suggérer des

* Alain QUILLIOT, Professeur d'Informatique - Université Blaise-Pascal.

conséquences possibles pour ces phénomènes autrement qu'en termes de pures intuitions, de frayeurs ou d'élans volontaristes.

II. LA THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE : LE CADRE DE BASE

Une famille M de biens de consommation étant fournie, on nomme fonction d'utilité toute fonction u qui à un vecteur x de \bar{R}^{IM_1} ($\bar{R} = R^+ \cup \{0\}$), supposé représenter une combinaison d'avoirs portant sur les biens de M , associe un nombre $u(x)$, exprimant la valeur selon un certain agent de cette combinaison. Il est d'usage de supposer qu'une telle fonction d'utilité doit être croissante (plus on a de produits et plus on est content) ; plus discutable est de supposer cette fonction continue (dans la mesure où les biens eux-mêmes n'existent très souvent qu'en quantités discrètes) ou convexe (est-il clair qu'il vaut toujours mieux un mélange bien dosé de deux produits que tout de l'un et rien de l'autre). De telles hypothèses sont malheureusement presque indispensables si l'on prétend obtenir des théorèmes. Elles se justifient partiellement quand on considère que l'ensemble de biens M aussi bien que l'ensemble des agents supposés dotés de fonctions d'utilité sur M , sont en fait des ensembles d'agglomérats de biens et d'agents, et que dès lors les fonctions d'utilité considérées se trouvent régularisées par une sorte d'effet de moyenne.

Un modèle simple de marché sera alors la donnée d'un quadruplet (X, M, w, U) où :

- X est un ensemble fini d'agents économiques ;
- M est un ensemble de biens ;
- $w = (w_{x,m}, x \in X, m \in M)$ est un vecteur résumant les avoirs initiaux des agents de X en biens de M . w est supposé tel que :

$$\forall m \in M, \sum_{x \in X} w_{x,m} \neq 0.$$
- $U = (u_x, x \in X)$ est une famille de fonctions d'utilité sur M , résumant les comportements respectifs des agents X comme consommateurs.

Un tel marché simple est dit continu et convexe si les fonctions $u_x, x \in X$ sont continues et convexes.

Un système de prix $p = (p_m, m \in M)$ étant donné pour les biens de M (p doit bien sûr être positif), chaque agent $x \in X$ va chercher à optimiser sa consommation z^x en résolvant le programme d'optimisation suivant :

$$(P_{x,p}) \begin{cases} z \in \bar{R}^{IM_1}; \\ \langle z, p \rangle = \langle w^x, p \rangle \text{ (revenu de } x \text{)}; \\ z_{\max} = u_x(z). \end{cases}$$

Un système de prix d'équilibre sera dès lors un système de prix p tel que les demandes de la résolution des programmes $P_{x,p}$ ne généreront ni excédent ni déficit pour aucun produit. En d'autres termes, un équilibre pour un marché simple (X, M, w, U) sera un

couple (p, z) tel que :

- $p \in R^{+IM_1}; z \in \bar{R}^{IX.M_1};$
- $\sum_{x \in X} w^x - z^x = 0$
- $\forall x \in X, z^x$ est solution optimale de $P_{x,p}$.

On obtient :

Théorème (Debreu 1959).

Tout marché simple continu et convexe admet un équilibre.

Ce résultat s'obtient comme conséquence du théorème du point fixe de Brouwer-Kakutani; l'intérêt qu'il y a à insérer des hypothèses de continuité et de convexité pour les fonctions de U réside dans le fait que la correspondance $p \rightarrow$ Solutions optimales du programme $P_{x,p}$ définit alors une fonction multivoque avec de bonnes propriétés de continuité.

Posons maintenant

$$\text{Rep}(w) = \{z \in \bar{R}^{IX.M_1} / \sum_{x \in X} z^x - w^x = 0.\}$$

($\text{Rep}(w)$ est en fait l'ensemble des répartitions possibles entre les agents de X des avoirs initiaux w). Un vecteur $z \in \text{Rep}(w)$ est dit Parétien s'il n'existe pas $z' \in \text{Rep}(w)$ tel que :

$$\forall x \in X, u_x(z'^x) > u_x(z^x).$$

On peut vérifier alors que tout équilibre (p, z) d'un marché simple est tel que z est Parétien et est en fait la plupart du temps localement unique (c'est-à-dire si p' est suffisamment voisin de p sans lui être colinéaire, alors p' ne peut être associé à un équilibre).

Le cadre de la théorie des jeux permet d'étendre le modèle ci-dessus en introduisant la notion de produit intermédiaire et d'organigramme de production. Une économie de production est alors un sextuplet (X, M, M_1, w, U, K) où :

- X est un ensemble d'agents ; M est un ensemble de biens ;
- M_1 est un ensemble de biens intermédiaires ; w est un vecteur avoir initial indexé sur X . ($M \cup M_1$) ; U est une famille de fonctions d'utilités portant sur M et indexée sur X ;
- $K = (K_x, x \in X)$ est une famille de cônes de $R^{IM \cup M_1}$ dits cônes de production et supposés résumer le savoir faire d'un agent $x \in X$. La signification d'un vecteur $v \in K_x$ est "A partir de quantités $|v_m|$ de produits m tels que $v_m < 0$, x peut produire des quantités v_m de produits m tels que $v_m \geq 0$ ". De ce fait, il est supposé qu'un vecteur non nul d'un cône K_x ne peut être positif ou nul.

Une économie de production est dite continue et convexe si les fonctions de la famille U sont continues et convexes et si chaque cône K_x peut s'écrire $C_x - R^{IM \cup M_1}$, où C_x est un compact convexe de $R^{IM \cup M_1}$.

Une coalition sur X est un vecteur $S \in [0, 1]^{IX}$. (Chaque agent $x \in X$ est donc en fait considéré comme un agrégat d'un grand nombre de petits agents et une certaine proportion parmi ces agents choisit de faire partie de la coalition).

On pose $\text{Rep}(S, w, K) =$ répartitions faisables pour la coalition $S = \{z \in R^{X.(M \cup M_1)}\}$ qui permettent d'écrire :

$$\sum_{x \in X} S_x \cdot z^x = \sum_{x \in X} S_x \cdot w^x + \sum_{x \in X} S_x \cdot 1_x (1_x \in K_x).$$

On dit que $z' \in R^{IX.(M \cup M_1)}$ domine $z \in R^{IX.(M \cup M_1)}$ si pour tout $x \in X$ on a $u_x(z'^x) > u_x(z^x)$ où z'^x est la trace sur R^{IM_1} du vecteur z'^x .

On nomme alors cœur de l'économie de production (X, M, M_1, w, U, K) l'ensemble des vecteurs $z \in \text{Rep}(X, w, K)$ tels qu'il n'existe pas de coalition S sur X et z' dans $\text{Rep}(S, w, K)$ qui domine z .

On obtient :

Théorème (Scarf-Aubin 1967).

Le cœur d'une économie de production continue et convexe est non vide.

Les répartitions associées à ce cœur sont par définition Parétiennes. A un élément z du cœur de l'économie (X, M, M_1, w, U, K) , correspond alors un vecteur prix p indexé sur $M \cup M_1$ tel que la part allouée à un agent x selon z optimise l'utilité de x pour le revenu $R_x = \text{Sup } p \cdot (w^x + 1), 1 \in K_x$.

Cette notion de répartition Parétienne est au centre de la théorie classique de l'équilibre telle que nous venons de la résumer. Les économistes libéraux ont cru notamment pouvoir l'interpréter comme l'existence d'un "Deus ex Machina" mettant adéquation la somme des intérêts individuels optimisés indépendamment les uns des autres de manière éventuellement égoïste et l'intérêt collectif.

III. QUAND LE CADRE DE BASE N'EST PLUS ADAPTE : UNE REFORMULATION

Considérons à présent le problème suivant : $X = \{1, 2, 3\}$ est un ensemble de 3 agents, $M = [a, b]$ est un ensemble de 2 biens. On a :
 $\forall x \in X, u_x(z_a, z_b) = \sqrt{z_a} + \sqrt{z_b}$;
 $w_{1,a} = w_{3,b} = 1$; les autres coordonnées de w sont nulles. L'agent 1(3) ne peut acheter du bien $b(a)$ que à l'agent 2, qui occupe donc une situation d'intermédiaire.

Le modèle des économies de production semble à première vue pouvoir s'adapter en posant $M_1 = \{(x, m), x \in X, m \in M\}$ et pour tout $x \in X, K_x =$ convexe engendré par les vecteurs $(0 \ -t \ 0 \ 1 \ 0)$ et $(0 \ -t \ 0 \ 1 \ 0)$ ($0 \leq t \leq 1$)
 $x.m \ m \quad y.m \ x.m$

pour tous les agents $y \in X$ auxquels x est susceptible d'acheter du bien $m \in M$. (Ont autant de versions d'un même produit que d'agents capables de vendre ce produit).

On vérifie alors sans trop de problèmes la non-vacuité du cœur de l'économie ainsi définie. Mais on constate alors que les prix associés sont tels que pour un même $m \in M$, les prix $p_{x,m}$ sont tous égaux à p_m . Autrement dit l'activité d'intermédiaire de l'agent 2 n'est pas rémunérée par une répartition du cœur et l'agent 2 travaille alors pour rien. Nous sommes dès lors amenés à reformuler le concept d'équilibre.

Economie statique à transits.

Il s'agit d'un quintuplet (X, M, w, U, M) où :

- X est une famille d'agents, M une famille de biens ;
- w est un vecteur avoir initial, U est une famille de fonction d'utilité ;
- $M = (M_m, m \in M)$ est une famille de réseaux d'ensemble de sommets X ; la signification de l'existence d'un arc $\overline{x, y}$ dans le réseau M_m est "l'agent y peut essayer d'acheter du produit m à l'agent x".

Rappelons qu'un réseau ou graphe orienté est la donnée $G = (X, E)$ d'un ensemble de sommets X, et d'un ensemble d'arcs E connectant certains de ces sommets. Une telle structure peut modéliser aussi bien un réseau de transport, qu'un circuit électrique ou bien encore une relation binaire entre objet (ordre, causalité, etc...).

Notre famille M sera ici supposée telle que pour tout $m \in M, x \in X$, il existe un producteur y de m ($y \in X/w_{y,m} \neq 0$) et un chemin dans H_m de y vers x.

Afin de séparer les achats que les différents agents peuvent effectuer en tant que consommateurs de ceux qu'ils réalisent en tant qu'acheteur-revendeur, nous associons à chaque réseau $H_m = (X, E_m)$ un réseau $H^0_m = (X^0, E^0)$, où $X = [e, s, pr(x), co(x), x \in X]$ et où : un arc relie e (entrée) à tout sommet $pr(x), x \in X$;

Un arc relie tout sommet $co(x)$ à s (sortie) ;

A tout arc $\overline{x, y} \in E_m$, correspondent 2 arcs $pr(x), pr(y)$ et $px(x), co(y)$ dans H^0_m ;

Pour tout $x \in X$, un arc relie $pr(x)$ à $co(x)$;

Dès lors l'activité entre les agents de X portant sur le bien m pourra se résumer par un flot positif sur H^0_m , un flot sur un réseau $G = (X, E)$ muni d'une entrée e et d'une sortie s étant par définition une fonction f qui à tout arc v de G associe une valeur réelle f(v) de telle sorte que :

$$\forall x \in X - e, s, \sum_{v \text{ arrive sur } x} f(v) = \sum_{v \text{ sort de } x} f(v).$$

Un vecteur prix p sur une telle économie à transit sera bien sur indexé sur X.M (les agents décident eux-mêmes des prix qu'ils assignent aux produits). Qu'attendra-t-on dès lors d'un couple formé d'un vecteur prix p et d'une famille $f = (f_m, m \in M)$ de flots positifs sur les réseaux H^0_m pour pouvoir le considérer comme **représentatif d'un équilibre ?**

- Que chaque f_m soit compatible avec w, soit que : $\forall x \in X, w_{x,m} = \overline{f_m}(e, pr(x))$;
- Que les activités d'intermédiaires soient **rentables** pour ceux qui les pratiquent, c'est-à-dire que pour un certain $r > 1$, on ait : $\overline{f_m}(pr(x), pr(y)) \neq 0 \Rightarrow p_{y,m} \geq r.p_{x,m}$; on dira alors que f et p sont r-cohérents et que (p, f) forme un r-équilibre.
- Que les achats effectués par un agent donné le soient toujours au prix le plus

avantageux, c'est-à-dire que :

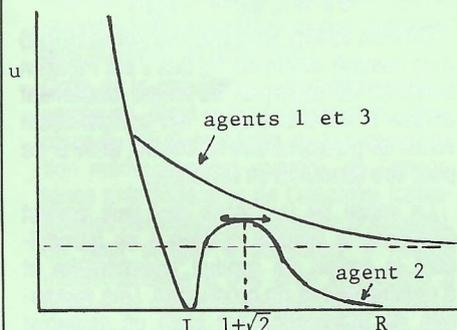
$$\overline{f_m}(pr(x), z) \neq 0 (z = pr(y) \text{ ou } co(y)) \\ \Rightarrow p_{x,m} = \inf p_{x',m} \\ x' / x' = y \text{ ou } \overline{x', y} \in E_m$$

- Que pour chaque agent $x \in X$, le vecteur consommation $f_m(co(x), s)$, m M soit solution optimale du programme d'optimisation suivant :

$$z \in \overline{R}^M ; \\ z_{max} = u_x(z) ; \\ z.p^x = R(x, p, f) = \text{Revenu de } x \text{ pour } p \text{ et } f \\ \text{avec : } p_x^z = \inf p_{y,m}, y/y = x \text{ ou } \overline{x, y} \in E_m$$

$$\text{et : } R(x, p, f) = \sum_{m \in M} p_{x,m} \cdot w_{x,m} + \\ \sum_{m \in M} \overline{f_m}(pr(y), pr(x)) \cdot (p_{x,m} - p_{y,m}) ; \\ y/y, \overline{x, y} \in E_m.$$

Exemple : si nous reprenons le problème proposé en début de paragraphe, nous voyons qu'il existe toute une classe d'équilibre associés, paramétrée par le quotient $r = p_{2,a} / p_{1,a}$. Nous pouvons obtenir sur un graphique l'évolution en fonction de r des utilités pour les agents 1, 2 et 3 pour ces équilibres :



Nous remarquons qu'il n'y a plus unicité locale des équilibres qui apparaissent comme pouvant correspondre à des niveaux d'activité très divers. Aucun de ces équilibres n'est Parétien (on peut toujours ré répartir les biens d'une manière qui soit plus avant avantageuse pour chaque agent). Ceci est confirmé par le résultat suivant :

Théorème (Bendali-Quilliot 1988)

Soit (p, f) un équilibre (r-équilibre, $r > 1$) pour une économie à transit continue et convexe (X, M, w, U, M) ;

Si il existe $m \in M$ et $\overline{x, y} \in E_m$ tels que $\overline{f_m}(pr(x), pr(y)) \neq 0$ alors la répartition induite par le vecteur $(\overline{f_m}(co(x), s), x \in X, m \in M)$ n'est pas Parétienne.

Il n'est pas clair qu'il existe forcément un équilibre (problème ouvert). On peut prouver dans tous les cas l'existence d'équilibres à ϵ près (soit avec des équilibres financiers qui admettent une légère distorsion). Une condition suffisante d'existence d'un équilibre est la suivante :

Notons $\text{Prod}(m) = [x \in X/w_{x,m} \neq 0]$ et $\text{Int}(m) = X - \text{Prod}(m)$. Si p est un système de

prix quelconque, nous construisons sur X un réseau $G(p) = (X, E(p))$ comme suit :

Un arc $\overline{x, y}$ existe dans $G(p)$ si m existe tel que $\overline{x, y} \in E_m$ et $x \in \text{Prod}(m)$ ou tel que $\overline{x, y} \in E_m, p_{x,m} < p_{y,m}$ et $p_{x,m} = \inf p_{z,m}, z \in X/Z, \overline{y, z} \in E_m$.

Un réseau est dit fortement connexe si il est toujours possible d'aller d'un sommet vers un autre p en suivant les arcs du réseau. On obtient alors :

Théorème (Bendali-Quilliot 1988)

Soit une économie statique à transit (X, M, w, U, M) . S'il existe $p \in R^{X.M.1}$ tel que le réseau $G(p)$ est fortement connexe, alors il existe pour tout $r > 1$ un r-équilibre pour l'économie considérée.

Les résultats précédents laissent un certain nombre de question ouvertes. Il est en fin de compte plus plausible de considérer qu'une économie peut se trouver en état d'équilibre sans que cela correspondent à un niveau d'activité ou à une répartition des biens satisfaisantes. Cette constatation relance d'une certaine manière la traditionnelle problématique de Keynes : Comment peut-on (du point de vue des pouvoirs publics ou des autorités bancaires par exemple) aider l'économie à changer de niveau d'équilibre ? Poser une telle question oblige alors à changer de modèle, et introduire explicitement un espace temps ainsi qu'un agent neutre "banque centrale", qui décide des taux auxquels sera prêté l'argent servant aux agents intermédiaires à financer leurs augmentations d'activité, et à partir desquels les agents épargnants seront rémunérés. Mais ceci serait déjà la matière à un autre exposé...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE "Graphes et hypergraphes". - Dunod (1971). (Cambridge, 1967).
- [2] B. BENDALI "Dynamique des équilibres en Economie". Thèse Grenoble I (1989).
- [3] G. DEBREU "Theory of Value". - Wileit (1959). Thèse Grenoble I (1989).
- [4] I. EKELAND "Theorie des jeux". - Presses Univ France (1974).
- [5] G. OWEN "Game theory". - Saunders (1978).
- [6] Club de Rome 2^e Rapport "Halte à la croissance". - (1972).
- [7] W. LEONTIEFF "A united Nation Study". N.Y. Oxford Univ Press (1977).
- [8] J. VON NEUMAN - O. MORGENSTERN "Theory of games and economical behavior". Princeton Univ Press (1944) N.Y. Oxford Univ Press (1977).

ÉCOLOGIE

POLLUTION DE L'AIR ET EFFET DE SERRE

par Christian Elichegaray*

Le climat de la planète dépend du bilan radiatif du système terre-océan-atmosphère, autrement dit de la manière dont l'énergie solaire est absorbée et répartie dans ces trois milieux.

LE CLIMAT SENSIBLE A LA COMPOSITION CHIMIQUE DE L'AIR

Moins du quart du rayonnement solaire arrivant sur la planète Terre est absorbé directement par l'atmosphère, une autre part étant diffusée dans toutes les directions, le reste (notamment du rayonnement visible) atteignant directement la surface du globe.

Le rayonnement qui parvient au sol est finalement constitué d'un rayonnement direct et diffus qui représente près de 50% de l'énergie captée par la planète. Chauffé par ce rayonnement, le sol émet en direction de l'espace un rayonnement infra-rouge qui est à son tour plus ou moins absorbé par l'atmosphère, et contribue ainsi à son échauffement.

Globalement, c'est donc la surface du globe qui constitue la principale source de chaleur de l'atmosphère, laquelle, en absorbant le rayonnement infra-rouge, fait écran à une dissipation totale de l'énergie solaire. En l'absence d'effet de serre, la température moyenne à la surface du globe serait inférieure d'environ 30°C par rapport à sa valeur actuelle (15°C). Cet échauffement de l'atmosphère par l'absorption des infra-rouges émis par le sol constitue ce que l'on dénomme couramment l'effet de serre. Mais cet effet n'a rien d'immuable et dépend de la composition chimique de l'air en gaz et particules, ceux-ci absorbant et diffusant préférentiellement certaines radiations du rayonnement solaire ou du sol.

C'est surtout le rayonnement solaire incident de courte longueur d'onde (ultra-violet et rayons X en particulier) qui est absorbé lors de la traversée de l'atmosphère (notamment par l'azote, l'oxygène et l'ozone). Par contre l'atmosphère laisse passer la majeure partie du rayonnement solaire dans sa partie visible. Les infra-rouges émis par les sols sont quant à eux absorbés par les gaz à effet de serre, en particulier la vapeur d'eau, le gaz carbonique, le méthane, le protoxyde d'azote, et d'autres gaz à l'état de traces. Il en résulte qu'un changement de la composition chimique de l'air peut, modifier le bilan radiatif et par conséquent le climat terrestre, risque souligné en 1938 par Callendar à propos des rejets de gaz carbonique par les activités humaines.

LES GAZ A EFFET DE SERRE AUGMENTENT DANS L'ATMOSPHÈRE

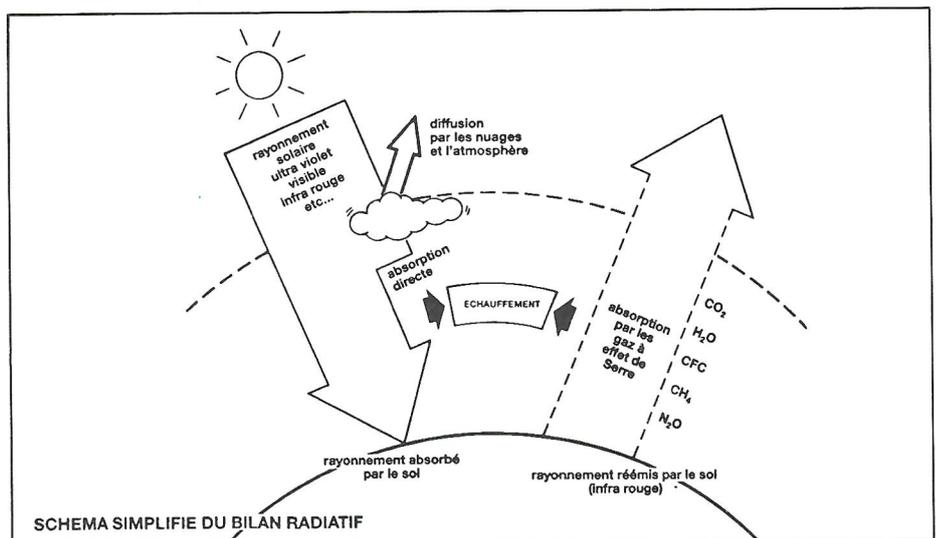
La composition chimique de l'air découle d'échanges continus de matière entre l'atmosphère et différents réservoirs (les océans, les sols, la végétation, etc.) qui stockent et libèrent cette matière à des rythmes variables selon les éléments chimiques concernés. Ces échanges de matière conduisent à des cycles, l'un des plus connus étant le cycle de l'eau, mais il existe aussi un cycle du carbone, de l'azote, du soufre, etc. Toutefois, depuis le 19^e siècle, les activités humaines ont sensiblement perturbé ces cycles naturels, entraînant un changement aujourd'hui perceptible de la composition chimique de l'air, notamment en gaz carbonique.

Le moteur du cycle naturel du carbone est l'activité biologique des sols et de la végétation continentale ou marine. Le gaz carbonique est fixé par photosynthèse dans la végétation, puis retourne tôt ou tard dans l'atmosphère par décomposition de la matière organique. Les océans échangent également du gaz carbonique et le stockent par dissolution, puis incorporation dans le phytoplancton ou le calcaire des animaux marins et des sédiments. Les océans sont le principal régulateur du cycle de carbone, et son principal réservoir sur la Terre (ils contiennent 60 fois plus de carbone que l'atmosphère).

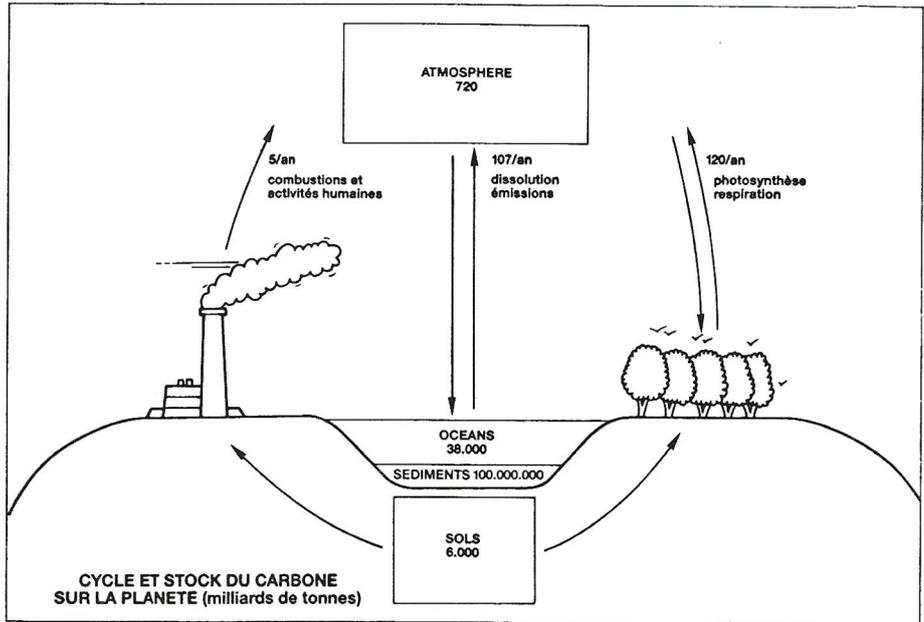
Le stock et la répartition du carbone marin dépendent, entre autres, de la température (le gaz carbonique est plus soluble dans l'eau froide), de sorte que ce sont surtout les zones polaires de formation d'eaux profondes qui piègent le gaz carbonique, à l'opposé des zones tropicales qui constituent plutôt des zones sources. Globalement, environ 200 milliards de tonnes de carbone par an sont échangées entre les océans, la biosphère continentale et l'atmosphère, soit le tiers du contenu de l'atmosphère en gaz carbonique. A ce cycle naturel s'ajoute actuellement l'injection supplémentaire d'au moins 5 à 7 milliards de tonnes de carbone par an dans l'atmosphère du fait des activités humaines. Ces rejets proviennent du gaz carbonique produit par l'usage de combustibles fossiles (5 milliards de tonnes de carbone émis par an) et de notre intervention sur le stock de carbone de la biosphère : déboisements, feux de forêts et modifications des sols du fait de l'extension des surfaces cultivables et du développement de l'agriculture à l'échelle mondiale. Le rythme de ces rejets est tel que seule la moitié est « pompée » biologiquement par les océans et la végétation, le reste s'accumulant dans l'atmosphère avec pour conséquence une augmentation de l'ordre de 0,5% par an de la concentration en gaz carbonique.

Les mesures montrent que ce phénomène est planétaire, et que nous sommes passés de 317 ppm de gaz carbonique il y a trente ans, à près de 350 ppm aujourd'hui (1 ppm = 1 centimètre cube par mètre cube d'air). L'analyse des bulles d'air emprisonnées dans les glaces antarctiques révèle que les teneurs en gaz carbonique étaient de l'ordre de 280 ppm au 18^e siècle.

Les projections prévoient un doublement de la teneur en gaz carbonique au cours du siècle prochain (600 ppm) par rapport à sa valeur au début du siècle (300 ppm), atteignant ainsi des valeurs inconnues depuis 150 000 ans. Ce dou-



* Christian ELICHEGARAY "Agence pour la qualité de l'air"



Les stocks de carbone dans l'air, les sols, les océans et les sédiments sont exprimés en milliards de tonnes. Les flèches indiquent le sens des échanges, et les chiffres leur volume moyen annuel en milliards de tonnes.

blement pourrait intervenir dès 2030 avec une croissance des rejets de 4% l'an, et à la fin du XXI^e siècle si la croissance est de 1% (elle était de 4,5% depuis 1950, puis a chuté en 1973 avec la crise pétrolière et les politiques énergétiques, et tend à remonter actuellement).

Au problème du gaz carbonique s'ajoute également celui de l'augmentation régulière dans l'atmosphère des teneurs en méthane (+1% l'an), protoxyde d'azote (+0,4% l'an) et CFC (+5 à 10% l'an), gaz à l'effet de serre dont on a récemment perçu l'importance pour le climat. Au rythme auquel ces gaz s'accumulent, il est calculé que leur contribution d'ensemble à l'effet de serre sera équivalente, au cours du siècle prochain, à celle du gaz carbonique.

Les raisons de l'augmentation régulière du méthane et du protoxyde d'azote sont encore mal élucidées. Ces composés sont émis par décomposition biologique de la matière organique des sols ou marécages ; parmi les causes premières de leur augmentation dans l'air figurent sans doute l'extension des surfaces des rizières et l'usage croissant de fertilisants. Pour le protoxyde d'azote s'ajoutent aussi des émissions dues à l'utilisation de combustibles fossiles, et par les feux de forêts.

Les CFC quant à eux sont des composés synthétiques utilisés notamment comme fluides réfrigérants, agents de dégraissage, ou gaz de propulsion des bombes aérosols. Surtout impliqués dans la destruction de la couche d'ozone les CFC absorbent dans l'infrarouge de sorte qu'ils influent aussi directement sur le climat de la planète.

LE RÉCHAUFFEMENT DU GLOBE : DES CONSÉQUENCES MULTIPLES

Depuis une certaine d'années la température moyenne de l'atmosphère a augmenté d'environ 0,4°C, ce qui pourrait concorder avec les émissions des gaz à effet de serre, mais pourrait aussi être dû aux variations naturelles de l'ensoleillement liées à des facteurs astronomiques. Aucun signal climatique dû à l'effet de serre n'est donc encore clairement décelé à ce jour.

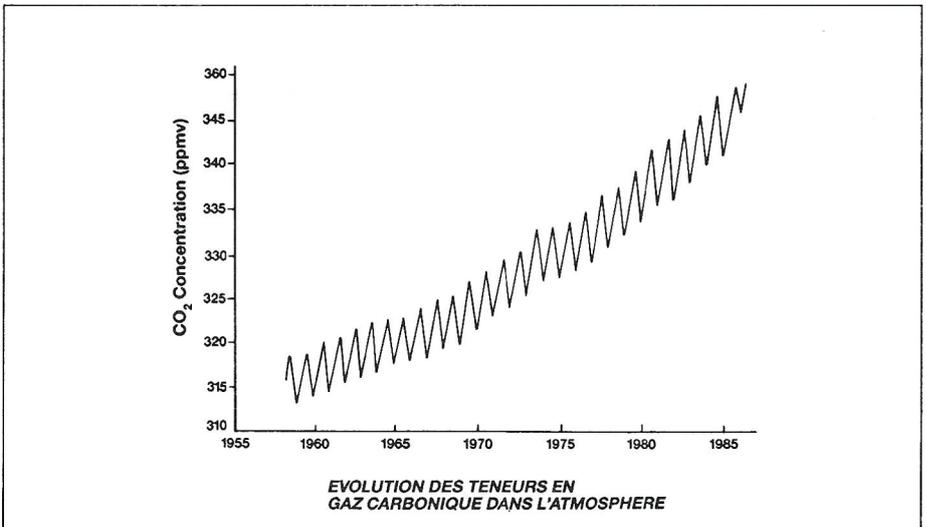
A long terme par contre, les modèles climatiques convergent pour prévoir un réchauffement moyen de 1° à 4° C des températures de surface par accroissement de l'effet de serre dans la troposphère (la couche d'air qui

s'étend du sol à 10 km d'altitude environ). Ce réchauffement augmenterait globalement les précipitations et les contrastes saisonniers, mais il serait inégalement réparti étant plus marqué en direction des régions polaires. En revanche, la stratosphère (la couche d'air entre 7 et 50 km environ) se refroidirait, ce qui pourrait y accroître la production d'ozone comme le montrent notamment les travaux de la Météorologie Nationale. De tels changements auraient d'importantes répercussions sur les ressources en eaux, la production végétale, et la répartition des zones agricoles.

Autre aspect de ce réchauffement, la hausse du niveau des mers par expansion thermique (+30 cm) et par la fonte progressive des glaciers polaires et continentaux (+1 à 3 m environ d'ici 2100), submergeant de nombreuses zones côtières, accélérant leur érosion, et augmentant la salinité des eaux souterraines et des sols de certaines régions (d'où une diminution de leur fertilité).

L'hypothèse est aussi évoquée d'une disparition irréversible des barrières de glace de l'Antarctique Ouest qui reposent de manière instable sur des piliers rocheux, entraînant un relèvement du niveau des mers bien plus important. Cette disparition serait susceptible, du moins selon certains experts, de modifier le moment d'inertie de la planète (par une répartition différente des masses d'eau sur la Terre) et la durée du jour.

Si les modèles climatiques concordent pour prévoir une hausse de la température par effet de serre, des incertitudes notables subsistent sur la date de son apparition et ses répercussions réelles. Ainsi l'on ne peut exclure l'hypothèse que les océans piègent dans le futur plus de gaz carbonique qu'ils ne le font actuellement, et leur inertie thermique peut ralentir considérablement les hausses des températures.



Les observations menées depuis 1958 à Mauna-Loa dans les Iles Hawai montrent une augmentation régulière du gaz carbonique dans l'atmosphère.

L'allure de la courbe en dent de scie résulte du rythme saisonnier des échanges de gaz carbonique entre l'air et la végétation ou les océans.

De même, la fonte des glaciers impose des constantes de temps à l'échelle de la dizaine d'années, voire du siècle. Il n'en demeure pas moins hasardeux de spéculer sur l'adaptation progressive de l'espèce humaine à des effets climatiques à croissance douce. L'étude des climats anciens montre en effet que des variations brutales, et de grande amplitude, se sont déjà produites, le système climatique ne répondant pas de façon linéaire aux perturbations qui lui sont imposées.

LES PROGRAMMES SCIENTIFIQUES GEOSPHERE-BIOSPHERE ET ECLAT

Où, quand, et comment ces changements se produiront-ils sont donc les questions auxquelles la communauté scientifique internationale tente de répondre actuellement au travers du programme de recherche Géosphère-Biosphère lancé par le Conseil International des Unions Scientifiques. Ce programme, auquel la France participe, vise l'étude et une meilleure connaissance des processus physiques, chimiques, et biologiques, qui gouvernent la composition chimique de l'atmosphère et l'équilibre climatique. L'objectif est d'aboutir à des modèles globaux, incluant l'ensemble des mécanismes régissant le climat en vue d'une meilleure prévision.

Le programme ECLAT (évolution des climats et de l'atmosphère) engagé par le Ministère de l'Environnement comporte pour sa part une participation au programme Géosphère-Biosphère, et des recherches socio-économiques prenant en compte l'étude des stratégies de réponse et des options énergétiques envisageables.

QUELLES REPONSES A L'EFFET DE SERRE ?

Une modification des températures moyennes de l'atmosphère paraît aujourd'hui scientifiquement établie, si ce n'est dans son ampleur, du moins dans sa tendance au cours du siècle prochain. Face à l'analyse des risques et des enjeux, les incertitudes qui demeurent doivent-elles inciter à l'action immédiate ou à l'attentisme prudent ?

Le recours au nucléaire étant fréquemment cité comme alternative pour diminuer les rejets de gaz carbonique, l'on mentionnera, pour saisir l'ampleur du problème, qu'il a été calculé que sa substitution au charbon, dans les seuls pays développés, pourrait imposer la construction d'une centrale tous les 6 jours pendant 30 ans !

Limitier de manière drastique les rejets de gaz à effet de serre impose donc une réponse

globale, et des accords intergouvernementaux impliquant le développement de technologies moins polluantes, une autre gestion des ressources naturelles, voire la remise en cause de nos modèles de croissance.

A court terme il semble que les seules stratégies de réduction des émissions de gaz carbonique soient les économies et une meilleure utilisation de l'énergie, et l'utilisation de combustibles qui émettent moins de gaz carbonique que le charbon ou le pétrole (le gaz naturel par exemple). Agir sur les autres gaz à effet de serre est tout aussi important, ceux-ci intervenant pour moitié dans le réchauffement prévu au cours du siècle prochain.

Dans ce domaine, la signature récente du protocole de Montréal est une première réponse. Conclu pour préserver la couche d'ozone, ce protocole impose une réduction de 50% des émissions de CFC d'ici l'an 2000, les pays de la communauté européenne allant jusqu'à diminuer l'effet de serre. D'autres actions sont à entreprendre, mais le problème de la couche d'ozone a déclenché le préalable à toute action : une prise de conscience internationale, et au plus haut niveau, des risques climatiques liés à un développement non maîtrisé des activités humaines.

HISTOIRE DES SCIENCES

CHRONIQUE DE L'ANNÉE 1889

Janvier

On apprend que dans l'Etat de New-York le supplice de la corde va être aboli... pour être remplacé par la mort au moyen de l'électricité pour les condamnés.

La Science doit profiter à tout le monde !

"La Société Médico-Légale s'occupe activement de la manière dont on devra procéder... On est tombé d'accord sur la valeur de la tension indispensable pour que la mort soit sûre, immédiate, et qu'aucun réveil ne soit possible"... Je vous fais grâce des autres détails. Il n'est cependant pas indifférent de savoir qu'on a procédé à des essais préliminaires sur des chevaux et des veaux... Devant le succès de ces expériences on décide même de tuer "Chief", l'éléphant le plus connu des Etats-Unis. Il faut dire à sa décharge qu'il était devenu méchant et dangereux...

On vient d'installer, à l'usine Saint-Jacques à Montluçon, un des plus grands laminoirs du monde, mis au point par deux ingénieurs de l'usine. Désormais cinq ouvriers et... deux gamins suffiront pour assurer le fonctionnement de cette énorme machine.

Au champ de Mars à Paris, les travaux de l'Exposition Universelle avancent rapidement, conformément aux prévisions : tout aura été mené à bien en deux ans seulement. Il faut dire que l'industrie métallurgique française est florissante. La Tour Eiffel est pratiquement terminée...

1889. Le développement scientifique et technique est déjà considérable et se manifeste chaque jour davantage dans la vie quotidienne : dans l'habitat, les transports, les modes de vie, la santé, les loisirs... La France prépare fébrilement l'Exposition Universelle qui va étonner le monde et qui nous léguera un témoignage éloquent de cette époque : la Tour Eiffel. Les revues scientifiques sont déjà nombreuses. Une des plus célèbres d'entre elles, "La Nature", en est à sa 17^e année d'existence. Elle va nous servir de guide.

Les trains vont de plus en plus vite. En Angleterre de véritables compétitions s'engagent entre les compagnies. Les 638 km qui séparent Londres d'Edimbourg sont parcourus à la vitesse commerciale de 80 km/h. On dépasse même 120 km/h en vitesse de pointe. L'arrêt de 30 minutes qu'on s'accordait à York pour dîner va être supprimé...

En France, on dépasse encore rarement le 90 km/h.

Montluçon se distingue une fois de plus. Un homme de 63 ans, Louis Coulon, ouvrier mouleur en fonte à l'usine Forey, porte une barbe de 2,32 m de long, sur son bras, comme une toge de sénateur romain. Le Maire de Montluçon a fourni un certificat d'authenticité...

Devant le développement de la distribution de l'énergie électrique il devient urgent d'installer des compteurs fiables. Un concours va être organisé dans ce but par le Conseil Municipal de Paris.

Février

Catastrophe ferroviaire en Belgique. Le train express Bruxelles Namur déraillait et heurte un pilier central d'un pont. On dénombre 19 morts et environ 40 blessés.

Prévision du temps. Un certain Plumandon, météorologiste à l'Observatoire du Puy-de-Dôme, et Colomès, juge au Tribunal Civil de

Clermont-Fd viennent de réaliser un appareil à prévoir le temps à la portée de tous : sur un cadran contenant 8 secteurs et 216 cases il suffit de déplacer une aiguille triple.

Pour cela, il faut connaître la direction du vent, la pression atmosphérique... et la saison. Si vous n'avez pas de baromètre, sachez que "la hauteur barométrique est d'autant plus faible que les nuages vont plus vite..."

Mars

Edison perfectionne sans cesse son phonographe : la dernière version a reçu un accueil enthousiaste. Parmi les applications prévues : "enregistrement préalable des discours des hommes d'Etat, avocats, prédicateurs, orateurs, conservation et répétition des voix des hommes célèbres, des adieux d'un mourant, etc..."

6 mai

Inauguration de la Tour Eiffel.

Juin

Eclairage électrique du Palais de l'Élysée.

L'installation comporte 1800 lampes de 50 watts. L'énergie provient d'une usine située à 2 km qui utilise des machines construites par la compagnie continentale Edison. A noter que l'éclairage électrique était déjà installé au Théâtre Français et dans les magasins et Jardins du Palais Royal.

R.J. (à suivre)

COMMENT REALISER DES FIGURES DE DIFFRACTION

Il existe différents types de montages qui permettent de mettre en évidence les phénomènes de diffraction. Dans ce numéro d' "Auvergne-Sciences", je me limiterai au montage simple qui permet d'observer la "diffraction de Fresnel". Pour cela, il existe un instrument remarquable qui va considérablement faciliter notre tâche : le laser. Un laser de faible puissance, de l'ordre du milliwatt, est largement suffisant et son maniement est sans danger pour l'expérimentateur (moyennant quelques précautions pour certaines observations). On trouve actuellement dans le commerce des lasers pour une somme inférieure à 1000F* – Ces lasers, à hélium-néon, fournissent un faisceau monochromatique rouge (longueur d'onde : 633nm).

C'est à Grimaldi, physicien italien du XVII^e siècle, que nous devons la première étude du phénomène de diffraction de la lumière. Afin de vérifier la propagation rectiligne de la lumière, Grimaldi perce une petite ouverture dans un écran et observe le comportement du pinceau lumineux ainsi isolé lorsqu'il rencontre divers objets. Lorsque l'objet est une plaque percée d'un petit trou, il constate que la tache lumineuse qui se forme sur un écran d'observation placé au-delà du trou est plus grande que celle que l'on devrait normalement voir si la lumière se propageait en ligne droite (Fig. 1). Grimaldi observe en outre des franges colorées dont la forme dépend de celle de l'ouverture. Plus surprenant encore : plus on réduit les dimensions de l'ouverture, plus la tache lumineuse grandit ! On peut imaginer qu'une ouverture suffisamment petite se comporte comme une source ponctuelle qui émet de la lumière dans toutes les directions. La réflexion et la réfraction de la lumière ne permettent pas d'expliquer ce phénomène. Grimaldi vient de découvrir un phénomène capital : la diffraction.

La postérité n'a pas retenu le nom de celui qui avait le premier étudié la diffraction. Il faut dire que la scène va être occupée par deux savants d'exception : Huygens et Newton dont les théories sur la nature de la lumière (théorie ondulatoire et théorie corpusculaire) vont s'affronter pendant plus d'un siècle. C'est le Français Augustin Fresnel qui, au début du XIX^e siècle, donnera enfin une théorie permettant d'interpréter correctement les phénomènes de diffraction et d'interférences.

source émettent des "rayons" lumineux qui n'ont aucune relation de phase entre eux, de sorte que les phénomènes d'interférences et de diffraction qui se produisent pendant un très court intervalle de temps sont détruits statistiquement pendant la durée moyenne d'une observation. C'est là une différence essentielle avec les phénomènes acoustiques : la différence est due à l'importance du rapport des ordres de grandeur des fréquences. Avec deux diapasons différents (fréquence de l'ordre de 1000 Hz) qui peuvent vibrer pendant plusieurs milliers de périodes (mettons pendant quelques secondes) on verra des interférences, parce qu'on a le temps de les observer avant l'amortissement complet du phénomène. Avec les vibrations lumineuses, émises par les atomes (fréquence de l'ordre de 10¹⁵ Hz), les "oscillateurs" auront été relancés un très grand nombre de fois de manière incohérente pendant la durée nécessaire à une observation.

Il ne faut pas en conclure qu'il est impossible d'observer les phénomènes de diffraction avec des sources ordinaires de lumière blanche. Seulement il sera nécessaire d'isoler, par un montage approprié, une partie suffisamment petite de la source. D'autre part, grâce à l'utilisation de filtres on pourra toujours isoler des radiations monochromatiques. En définitive, le laser donne un faisceau intense "prêt à l'emploi" ; et il permet de réaliser simplement de belles et nombreuses expériences.

Le faisceau laser

En quoi le faisceau laser diffère-t-il des autres sources de lumière ? En dehors du fait qu'on a concentré dans un faisceau très fin (de l'ordre du mm de diamètre) une puissance lumineuse énorme, sans commune mesure avec les autres sources, le faisceau laser possède deux propriétés remarquables : il émet des radiations particulièrement monochromatiques et d'autre part il est constitué de "rayons" pratiquement parallèles. Cette seconde propriété signifie qu'il est possible de focaliser le faisceau (grâce à un objectif) en un point de très petites dimensions, de sorte qu'on peut obtenir une source "ponctuelle" très lumineuse.

On exprime ce fait en disant que le faisceau laser possède la "cohérente spatiale" : tous les rayons lumineux arrivent en phase dans un plan normal à ce faisceau.

Dans le cas d'une source ordinaire étendue (par exemple un filament de lampe à incandescence), les différents points de cette

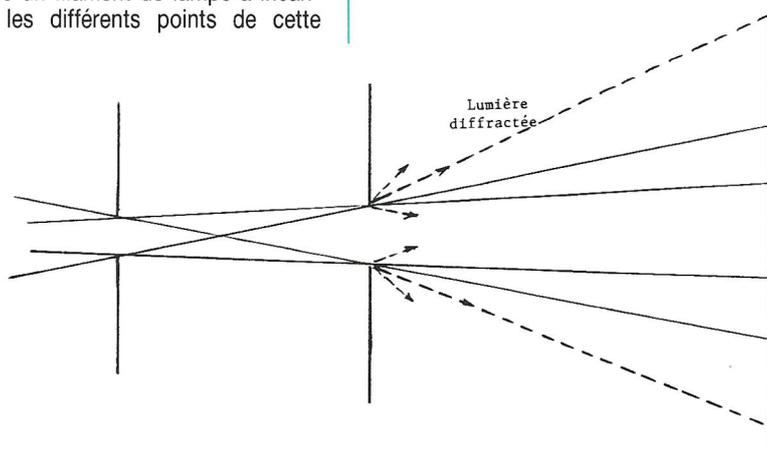


Figure 1.

* Ces lasers sont vendus généralement en kit et peuvent être montés par l'utilisateur. L'ADASTA peut se charger du montage pour une somme modique.

Montage expérimental.

Je suppose que vous avez acquis ou emprunté un laser (éventuellement par l'intermédiaire de l'ADASTA). Que vous faut-il d'autre pour réaliser des expériences ? A vrai dire, très peu de choses : un local où vous pourrez faire l'obscurité (mais vous pourrez toujours réaliser certaines expériences la nuit si elles exigent une bonne obscurité) et un appareil photographique dont on peut retirer l'objectif, si vous voulez garder des documents (je pense que cela en vaut la peine !). Tout le reste, (divers accessoires), vous les trouverez facilement autour de vous, et le plus souvent à peu de frais.

Il faut d'abord se procurer une petite lentille convergente de un ou deux cm de distance focale. Une loupe très grossissante ou un verre pour hypermétrope pourront convenir ; un objectif de microscope sera parfait. A défaut, une bille de verre bien homogène, voire une simple goutte d'eau au bout d'une seringue suffiront dans la plupart des cas. Ces instruments d'optique devront être très propres : la moindre poussière donne des figures indésirables ! Si votre dispositif convergent est une petite lentille, il est avantageux de coller son pourtour sur un morceau d'aimant en plaque percé d'un trou de 5 à 6 mm de diamètre. Coller sur la face de sortie du faisceau laser une rondelle en matériau magnétique pour y fixer l'aimant (une lame de rasoir convient). (Fig. 2).

Dans le faisceau, au-delà de S, seront placés les différents objets dont on veut observer la figure de diffraction sur l'écran.

Avec ce type de montage, pour photographier les figures de diffraction, il faut retirer l'objectif et former directement l'image sur le film. En revanche on ne pourra obtenir que des images d'objets de petites dimensions, de l'ordre de quelques cm.

Technique opératoire.

Le laser muni du dispositif optique permettant d'ouvrir le faisceau est posé sur une table ou sur un support stable. Pour bien centrer le faisceau laser sur l'axe optique on déplace par tâtonnement la lentille L de manière que la trace du faisceau élargi soit centrée sur la trace repérée sur un écran éloigné en absence de L. Plus la distance focale de L sera courte, plus le faisceau sera ouvert : les phénomènes seront moins lumineux mais il sera plus facile d'obtenir des plages d'éclaircissement homogène sur la pellicule.

Je signale ici un moyen de repérer la position du point de focalisation du faisceau en S : on place dans le faisceau, normalement à celui-ci, une feuille de papier calque (ou un

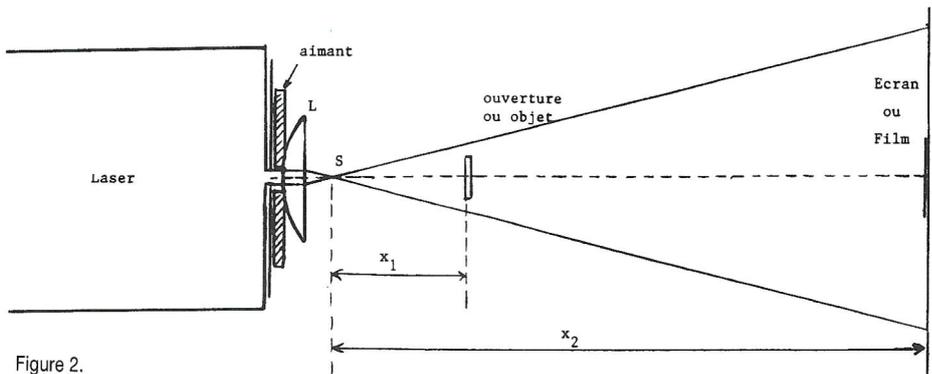


Figure 2.

verre dépoli). On observe, par transmission, sur une feuille de papier placée en arrière, des taches dites de "granularité" : ce sont des phénomènes d'interférences dues à la lumière diffusée par le calque. Lorsque le diffuseur contient le point S, la dimension de ces taches passe par un maximum.

On dispose l'objet sur un support mobile et l'appareil photographique sur son pied. Les figures obtenues dépendent de deux paramètres qu'on pourra faire varier indépendamment l'un de l'autre : la distance x de la source à l'objet et la distance x' de la source à l'image. Ces distances peuvent varier de quelques cm à quelques mètres. On peut obtenir avec le même objet de nombreuses figures différentes.

Pour une position donnée de l'objet on observe l'image sur un écran blanc, au besoin à l'aide d'une loupe. Surtout ne jamais placer l'œil dans le faisceau direct. Quand on veut photographier une image on substitue le film à l'écran.

Les temps de pose sont très variables : il convient de faire des essais préliminaires. Pour un laser dont la puissance est de 1 mW, dans les conditions décrites précédemment, on prendra des films lents (100 ASA par exemple). Les indications des posemètres sont très approximatives car elles ne sont pas adaptées à ce type de mesure et de lumière. Les films couleur sont plus sensibles que les films noir et blanc.

Figures de diffraction de Fresnel.

Commencer par réaliser les figures correspondant à des ouvertures de forme simple :

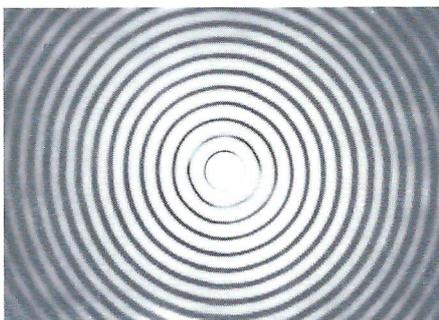


Photo n° 1

trou circulaire** (photo n° 1), carré (photo n° 2), rectangulaire, triangulaire, etc... (on trouvera ci-contre la technique qui permet d'obtenir des ouvertures de qualité grâce auxquelles

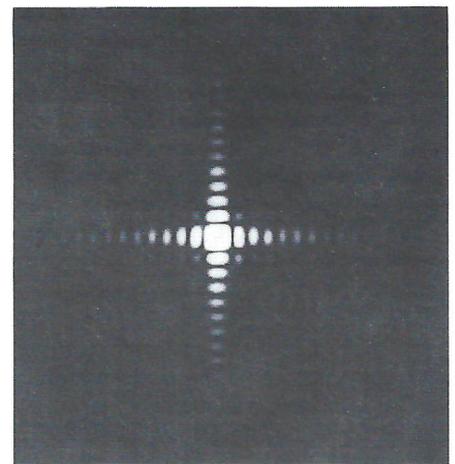


Photo n° 2

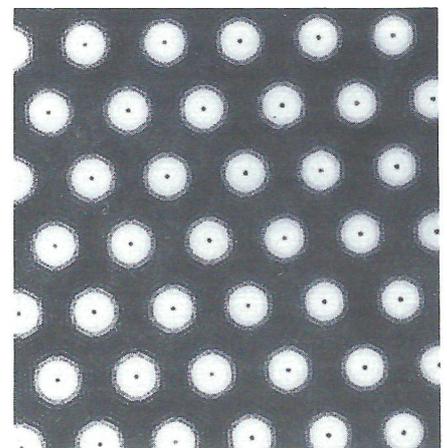
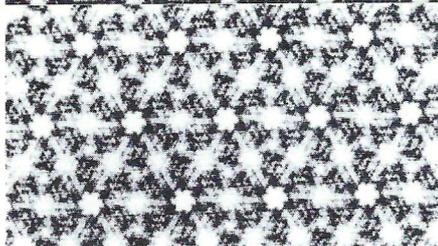
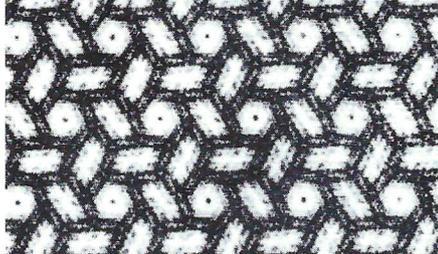
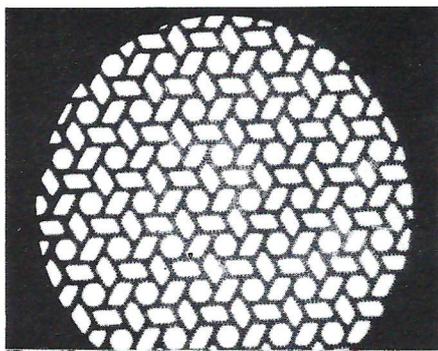


Photo n° 3

vous serez surpris du nombre de franges que l'on peut observer). Des images curieuses pourront être obtenues avec des structures périodiques (passoire : photo n° 3) ou grille de rasoir (photos nos 4-5-6). Les planches de symboles pour transfert à sec sont une mine abondante (photos nos 7-8). Les grillages (tamis) superposés permettront d'obtenir des effets curieux (photo n° 9).

** Avec une petite ouverture, on pourra utiliser le faisceau laser non focalisé.

EXPERIENCES POUR TOUS



Photos n° 4-5-6. Grille de rasoir

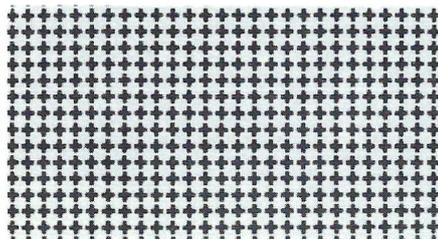


Photo n° 7

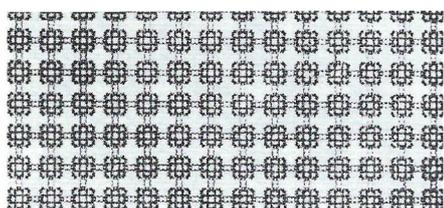


Photo n° 8

Il est intéressant d'observer également la lumière diffractée dans l'ombre d'un obstacle. A cet égard la photographie n° 10 mérite un commentaire. Il s'agit de l'ombre d'une bille de roulement ; on voit que la lumière diffractée donne un maximum de lumière, appelé "tache de Poisson", au centre du phénomène.

On se souvient de l'anecdote : Poisson, cherchant à réfuter les théories de Fresnel sur la nature ondulatoire de la lumière se serait exclamé : "Si votre théorie était correcte on devrait observer (sous entendu : «c'est évidemment absurde») de la lumière au milieu de l'ombre portée par une bille !". Avec le laser, vous n'aurez aucune difficulté à montrer cette tache et peut être aussi les anneaux qui l'entourent.



Photo n° 9. Grillages superposés

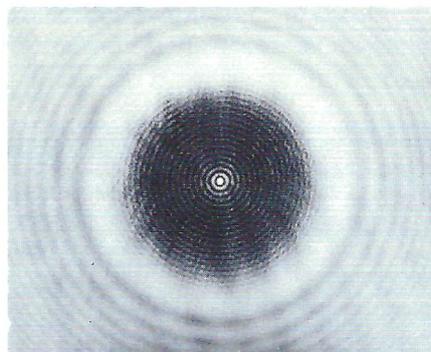


Photo n° 10. Diffraction dans l'ombre d'une bille. Au centre : "tache de Poisson".

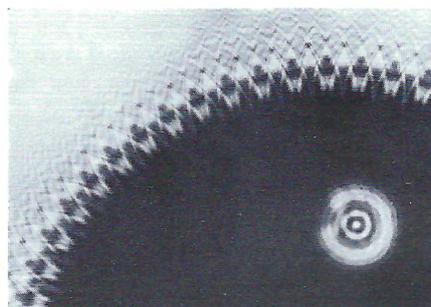


Photo n° 11. Engrenage de montre



Photo n° 12. Poids de un gramme.

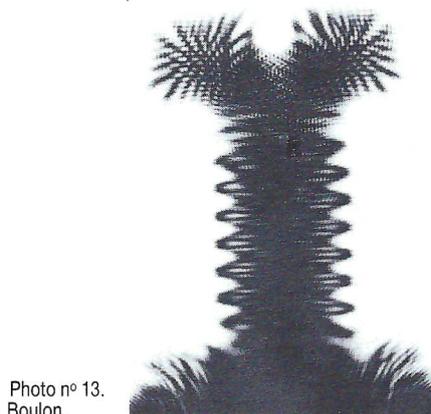


Photo n° 13. Boulon.

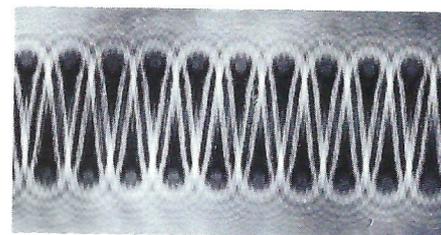


Photo n° 14. Ressort

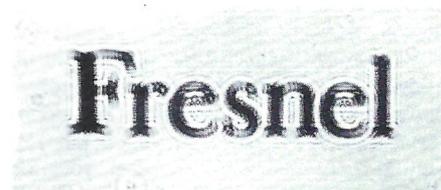


Photo n° 15.

Placer une bille de roulement neuve, bien propre, de 4 ou 5 mm de diamètre, à 20 ou 30 cm de la source S et l'appareil photographique à un mètre ou deux.

Vous pouvez chercher à obtenir des images curieuses avec des objets les plus divers : rouage de montre (photo n° 11), poids en laiton (n° 12), boulon (n° 13), ressort (n° 14), etc... Avec des lettres collées sur une lame de verre on peut rendre hommage à ce grand physicien que fut Augustin Fresnel. (Photo n° 15).

(à suivre)

R. JOUANISSON

BIBLIOGRAPHIE

Voici quelques références de livres ou revues donnant les précisions, d'ordre expérimental, sur la manière de réaliser des expériences de diffraction (notamment avec un laser).

- Pour la Science, (adaptation de la revue américaine "Scientific American") diffusion E. BELIN. Articles de Jearl WALKER. Voir notamment : "L'utilisation des billes de roulement en optique" - Janvier 85).
- Exploring Laser Light de T. KALLARD avec notamment une abondante liste de références à des articles parus dans "American Journal of Physics", et "The Physics Teacher".
- "La lumière du laser : guide d'expériences". M. HENRY et R. JOUANISSON, Masson 1987. Cet ouvrage contient des indications pratiques pour la réalisation des expériences.

P.S.M. COMPOSANTS

- ▶ Composants électroniques professionnels
- ▶ Matériel et outillage
- ▶ Appareils de mesure
- ▶ Librairie technique

29, place du Changil
 63000 CLERMONT-FERRAND
 Tél. 7331 1376

NOUVELLE VISITE DE L'USINE ROUSSEL-UCLAF DE VERTOLAYE

La sortie organisée par l'ADASTA* le 15 octobre dernier présentait deux innovations : le jour choisi – un dimanche –, et le thème retenu – visites conjointes d'un château classique et d'une usine moderne.

Au rendez-vous, fixé à 9h, aux Cézéaux (devant l'IUT, comme d'habitude) se retrouvaient 33 participants, membres de l'ADASTA, et quelques curistes de Royat intéressés par une excursion inhabituelle. Une demi-heure plus tard, nous étions accueillis, à la grille du château de Parentignat, par notre guide, habitant sur place. Le ciel gris et bas ne permit pas de mettre en valeur la décoration intérieure des pièces du rez-de-chaussée, et il fallut l'éclairage électrique pour admirer les nombreuses œuvres d'art.

Cette riche demeure, construite de 1707 à 1724 par François de LASTIC sur les restes d'un château plus ancien, possède une vaste cour d'honneur ouverte à l'ouest ; le château lui-même est en U, avec deux ailes nord et sud, flanquées de tours, et un fronton classique ; deux corps de bâtiments, à usage de communs, prolongent ces ailes et bordent la cour principale.

A l'est, le château présente une façade d'aspect plus sévère, donnant sur une large terrasse ; au-delà, un parc anglais, avec un bassin et de très beaux arbres, donne de vastes perspectives sur la campagne environnante ; l'horizon est limité par la butte volcanique d'Usson, alors que, sur les côtés, d'anciens bâtiments, parmi lesquels un moulin, agrémentent ce site champêtre.

La partie ouverte à la visite est limitée à quelques pièces du rez-de-chaussée : mais le mobilier qu'elles contiennent est exceptionnel : tapisseries, boiseries, lit dit "de François 1^{er}" provenant du château de Villeneuve-Lembron, chaises à porteurs, cartels, bibelots anciens, vases de Chine de dimensions exceptionnelles donnent un caractère somptueux à une résidence qui a toujours appartenu à la même famille, originaire du Cantal, et dont certains membres ont été des personnages influents dans l'histoire régionale et nationale. Ceci explique le nombre et la qualité des tableaux – le plus souvent des portraits – qui ornent les pièces du château. Citons le portrait de la Princesse Palatine par F. de Troy (1694), celui de Louis XV par C. Van Loo, celui du grand Dauphin par Rigaud et ceux de plusieurs membres de la famille de Lastic par des peintres de la même école. Des toiles attribuées à M^{mes} Vigée-Lebrun, à Le Nain, à Boucher sont également présentées dans les salons, où tous les meubles sont signés.

La bibliothèque, qui occupe l'angle sud-est du château, est admirable ; de style Empire, elle contient environ 10.000

volumes superbement reliés, parmi lesquels un très grand nombre d'éditions originales. D'autres ouvrages complètent cette collection exceptionnelle, qui renferme au total 28.000 pièces. En outre, des documents d'archives, remontant jusqu'au XII^e siècle, sont réunis dans un chartrier, classé monument historique ; nous ne pûmes le voir, car des vols de documents, commis récemment, nécessitent des mesures de sécurité immédiates.

La visite du château se termina par une petite promenade sur la terrasse, agrémentée par des orangers et des citronniers en "pots" : si les premiers présentent des fruits purement décoratifs, à l'écorce très épaisse, les citrons récoltés sont d'excellente qualité.

Vers 11 heures, nous reprîmes la route pour gravir les pentes du Livradois, et atteindre Le Vernet-la-Varenne, puis St-Germain-L'Herm. C'est là que nous étions accueillis, pour déjeuner, par un membre de l'ADASTA, M. Lanet, propriétaire de l'Auberge des Cîmes. Minéralogiste amateur, il nous présenta sa collection, consacrée surtout aux minéraux régionaux, parmi lesquels l'améthyste, exploitée autrefois dans les environs.

Ensuite, nous fîmes honneur au repas, spécialement préparé à notre intention, à base de spécialités auvergnates : feuilleté aux escargots, truite aux lardons, gigolette de canard aux choux furent très appréciés, dans une ambiance joyeuse et détendue. Et, pendant ce temps, le soleil chassait les nuages bas qui nous avaient empêché de voir les larges horizons de Livradois : en reprenant notre excursion, l'après-midi, par St-Bonnet-le-Chastel, Marsac et Ambert, nous pûmes admirer les harmonies de couleur des bouleaux, frênes et hêtres dispersés dans les résineux omni-présents. Et vers 15 heures, nous arrivions par la vallée de la Dore, à Vertolaye, où l'usine ROUSSEL-UCLAF organisait un week-end "portes ouvertes". Au milieu d'une foule considérable, nous pûmes alors parcourir les ateliers de fabrication de composants pharmaceutiques très élaborés, comme l'hydrocortisone. (Pour la description détaillée de cette visite, voir le numéro précédent d'Auvergne-Sciences). Vers 18 heures, le signal du retour fut donné et nous rejoignîmes Clermont, gardant de ce circuit l'impression que l'Auvergne sait associer harmonieusement une nature sauvage, des monuments une gastronomie originale et des usines performantes à la pointe du progrès.

M. MASSAUX

On pourrait croire, en examinant le cliché représentant un atelier de production à l'usine ROUSSEL-UCLAF (Auvergne-Sciences, n° 10, page 7), que le photographe marchait au plafond ! Hélas, pour lui, il n'en était rien, et c'est simplement le cliché qu'il faut retourner ! Bravo à ceux qui s'en étaient aperçus !

ACTIVITÉS DE LA SECTION ASTRONOMIE

L'ADASTA organise, en liaison avec la MAFPEN, la Mission d'Action Culturelle et l'Association des Astronomes Amateurs d'Auvergne un ensemble d'activités, dans le domaine de l'Astronomie, dans les établissements scolaires de l'Académie.

L'ensemble de ces activités, dont on trouvera le détail ci-dessous, sera coordonné par Jean Chapelle, Professeur au collège Gérard Philipe à Clermont-Ferrand et président de l'A.A.A.A., avec la participation de M. Ameurlain (Sainte-Florine), M. Lescuré (Riom) et M. Renoux (Marcellat).

ACTIVITÉS ASTRONOMIQUES

(pouvant faire l'objet de PAE)

1 - Réalisation de photographies astronomiques.

La photographie des régions lunaires, des planètes Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, des nébuleuses et des galaxies est un sujet d'activités passionnantes pour les amateurs qui réalisent des prouesses dans ce domaine. Les jeunes sont attirés par cette activité.

L'ADASTA et la MAFPEN, avec le concours de l'Association des Astronomes Amateurs d'Auvergne, mettent à la disposition des enseignants et de leurs élèves tout le matériel nécessaire (téléscope, appareil photo, films spéciaux, etc...) avec assistance de l'animateur. A charge à chacun, ensuite, de développer les films et réaliser les agrandissements sur papier dans son établissement. Une exposition regroupant les travaux réalisés sera organisée en fin d'année scolaire.

2 - Mesure du rayon de la Terre

A la suite du succès remporté durant la précédente année scolaire par l'expérience d'évaluation du rayon de la Terre (selon la méthode d'Eratosthène, à partir de la mesure de la hauteur d'un objet et de la longueur de son ombre, mesures réalisées simultanément par des collèges de notre région et d'autres situés sur le même méridien : voir "La Montagne" du 16 juin 1989), nous renouvelons cette expérience. Elle associera des collèges de notre région, de Picardie et de l'Hérault. Les enseignants intéressés recevront toute documentation et indications utiles pour réaliser l'expérience. L'ADASTA assurera la coordination entre les différentes régions.

ACTIONS DIVERSES

1 - Prêt, dans les établissements scolaires, du diaporama "Voyage dans l'Univers".

Ce diaporama comprend les meilleures photographies réalisées par la NASA au cours des différentes missions spatiales (Apollo sur la Lune, Viking sur Mars, Voyager près de Jupiter et Saturne) et par l'observatoire du Mont Palomar (Nébuleuses, Amas

d'étoiles et Galaxies).

Durée de la projection : 1 heure.

Un commentaire est enregistré dans une cassette et imprimé dans un fascicule.

2 - Prêt d'un planétarium dans les établissements scolaires.

Il s'agit d'un planétarium GOTO EX3, remarquable instrument pédagogique qui permet :
- de reproduire sur une coupole de 3,50m de diamètre (pouvant accueillir 25 élèves à la fois) la vision du ciel nocturne et de réaliser les mouvements apparents des étoiles, du soleil, de la lune, des planètes,...

- de justifier les saisons ;

- de mettre en évidence les conditions d'observation de ces astres et de visionner ces phénomènes sous d'autres latitudes.

Pour l'utilisation de ce planétarium un stage est organisé le 15 novembre. Seules les personnes ayant participé à ce stage seront en mesure d'utiliser le planétarium (durée du prêt : une semaine).

3 - Observations astronomiques à l'observatoire de l'A.A.A.A.

L'observatoire de l'A.A.A.A. est situé sur le plateau des Cézéaux, dans le complexe universitaire. Il est équipé d'un télescope très performant et de tout le matériel nécessaire pour l'observation et la réalisation de photographies astronomiques.

Des soirées d'observation sont organisées à l'intention des enseignants, des élèves et de leurs parents.

4 - Aide aux Projets d'Action Educative.

L'ADASTA peut apporter une aide aux PAE ayant pour thème l'astronomie.

5 - Organisation de demi-journées de formation en Astronomie.

Si vous formez un groupe d'enseignants d'un même établissement ou d'un même secteur géographique désirant le concours de l'ADASTA avec le soutien de la MAFPEN pour organiser sur place un ou plusieurs après-midi de formation en Astronomie sur les thèmes de votre choix (voir par exemples les stages et actions cités sur la présente circulaire). Veuillez nous le faire connaître. Nous vous contacterons.



APPAREILS DE MESURES ÉLECTRONIQUES

RÉPARATIONS - MAINTENANCE ÉTALONNAGE

TOUTES MARQUES

▶ CONTRÔLEURS-MULTIMÈTRES	▶ ENREGISTREURS	▶ ALIMENTATIONS
▶ OSCILLOSCOPES	▶ GÉNÉRATEURS BF	▶ APPAREILS DE LABORATOIRES

Distributeur A.O.I.P. Mesures

64, av. Jean-Noëllet - 63170 AUBIÈRE - Tél. 73 27 61 31

S.A.V. agréé : AOIP Mesures - AVANTEC/BIOBLOCK SCIENTIFIC

INFORMATIONS RÉGIONALES



PREMIÈRES JOURNÉES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES DE LA VILLE D'ISSOIRE

(anciennement Forgeal), entreprise cinquantenaire qui a subi dans les dernières années une évolution technologique rapide imposée par les besoins de l'aéronautique.

N'oublions pas la société REX composites, qui étudie et réalise des pièces en matériaux composites qui sont utilisés notamment dans l'aérospatiale.

Dans ce contexte industriel, il était naturel que la nouvelle municipalité crée une animation destinée à faire prendre conscience au public des ressources de la ville. Ainsi sont nées les premières Journées Scientifiques et Techniques de la ville d'Issoire. Au programme : Expositions permanentes avec la participation d'Airforge, Cegedur, Rex-Composites, Ariane-Espace, Lycée Professionnel Sainte-Claire Deville, Collège de Verrière, Club Clermontois de l'Espace ainsi que l'ADASTA qui a prêté une exposition.

Diverses animations, débats et conférences se sont déroulés pendant la période du 16 octobre au 15 novembre. Notons en particulier les conférences de M. Faure, responsable du Centre de Formation de CEGEDUR, sur l'histoire de l'aluminium et des usines d'Issoire ;

du Professeur Cadoret, de l'Université Blaise Pascal, sur le Laboratoire Spatial et les expériences françaises réalisées dans la navette ; de M. Moniot, P.D.G. de la Société Rex-Composites, sur les matériaux du 3^e millénaire. Lors de l'inauguration officielle de ces "Journées", M. Pascallon, Maire d'Issoire, a sou-

ligné tout l'intérêt que présentait pour sa cité, cette innovation dans le domaine de l'information du public. Ces premières journées seront suivies d'autres. Déjà on réfléchit à la création d'un musée de l'aluminium... qui trouverait tout naturellement sa place dans cette ville dynamique.

Issoire est la capitale européenne de l'aluminium. Le groupe Pechiney CEGEDUR emploie 1500 personnes et traite 100 000 tonnes d'aluminium par an, dont 75% vont à l'exportation : c'est dire que cette entreprise est particulièrement sensible à l'évolution du marché de l'aéronautique et au cours du dollar. Actuellement les perspectives d'avenir sont encourageantes, compte tenu des marchés dans l'aviation civile et l'aéronautique. Un point noir cependant : la difficulté de trouver en Auvergne les ingénieurs et les techniciens dont la firme aura besoin dans les prochaines années. L'industrie à Issoire, c'est également Airforge

IMAGES DE LA RECHERCHE EN AUVERGNE

Le jeudi 30 novembre 1989 à 14 h 30 se tiendra le Colloque "IMAGES de la RECHERCHE en AUVERGNE" sur le Complexe Scientifique des Cézeaux à Aubière.

Organisé par le C.A.R.T. (Comité d'Auvergne pour la Recherche et la Technologie), pour la 4^e fois consécutive, ce Colloque a pour objectif de présenter, aux différents acteurs scientifiques, industriels et économiques de la région, des actions de recherche particulièrement intéressantes ou démonstratives pour lesquelles le Conseil Régional d'Auvergne a apporté son soutien financier.

4 thèmes seront exposés autour desquels les débats auront une large place :

- "La Résonance Magnétique Nucléaire et ses applications à la physique, à la chimie, à la biologie et à la médecine" : M^{lle} A. VEYRE, professeur et MM. ZANCA (INSERM U.71), M. G. DAUPHIN et M. J. DUPUIS (UA CNRS 485 et 830), M. J.P. RENO (INRA de Theix).

Trois appareils fonctionnent en Auvergne : 1 à l'INRA de 400 mégahertz, 1 à l'Université Blaise-Pascal de 350 mégahertz et 1 à l'INSERM U.71 de 200 mégahertz. Les principales techniques de RMN seront présentées ainsi que la nature et les applications des travaux engagés.

- "Recherches sur la qualité du blé en Auvergne" : M. G. BRANLARD, chargé de recherche (INRA).

ou comment les avancées d'une recherche macromoléculaire sur le blé peuvent conduire à des variétés plus performantes et répondant à une haute exigence en matière de qualité du produit.

- "Vers de nouvelles architectures de terre grâce à des techniques modernes" par M. J. JEANNET, architecte ("Pisé Terre d'Avenir"),

M. J.M. MASSOT, architecte (Ecole d'Architecture de Clermont-Fd), M. M. LIVET, ingénieur (Laboratoire des Ponts et Chaussées de Clermont-Fd).

L'utilisation de la terre crue (pisé) dans un contexte architectural réel est étudiée depuis 1982. Les résultats permettent d'envisager le développement d'une technique constructive nouvelle découlant d'un matériau traditionnel, utilisable localement et susceptible d'exportation.

- "Développements et perspectives des recherches sur le photovieilissement des matériaux polymères" par M. J. LEMAIRE, professeur (Laboratoire de Photochimie Moléculaire et Macromoléculaire - Université Blaise-Pascal).

Depuis une dizaine d'années, les connaissances sur les mécanismes de photovieilissement des matériaux polymères, à l'état solide, se développent rapidement en particulier grâce à la mise au point de nouveaux moyens expérimentaux d'étude du photovieilissement accéléré. L'objectif principal est d'exploiter ces techniques afin de prévoir la durabilité du matériau sur le terrain.

A l'issue de cette intervention, les congressistes seront invités à visiter le CNEP (Centre National d'Évaluation de la Photo-protection) dont la vocation est d'assurer le transfert à l'échelle nationale et à l'échelle européenne des acquis scientifiques du Laboratoire de Photochimie Moléculaire et Macromoléculaire.

XI^e ATELIER EUROPÉEN D'ANALYSE CYTOGÉNÉTIQUE

Le XI^e Atelier Européen d'Analyse Cytogénétique Automatique a eu lieu à Besse-en-Chandesse (P.-d.-D.) du 14 au 17 septembre 1989.

Sa réalisation a été confiée au laboratoire de Cytogénétique Médicale de l'Université de Clermont-Ferrand I, sous la Présidence du Professeur Paul MALET.

Le développement actuel des études chromosomiques dans d'importants domaines : diagnostic prénatal des malformations (mongolisme), pathologie de l'enfance, anomalies de la reproduction (stérilités), diagnostic des maladies du sang et des tumeurs, est désormais bien connu.

L'Atelier Européen a eu pour thème principal les nouvelles méthodes de cytogénétique moléculaire qui permettent la localisation précise des gènes et des chromosomes anormaux responsables de maladies graves.

Le Professeur J. GRAY (Livermore Californie) a exposé en qualité de conférencier invité les données les plus récentes concernant la préparation et l'utilisation des sondes moléculaires en pratique médicale.

La détection automatique des anomalies chromosomiques, l'effet des agents mutagènes sur le génome humain, la structure du noyau cellulaire ont été également discutés.

Plusieurs systèmes d'analyse vidéo-informatique du caryotype ont été mis en démonstration.

Cette manifestation a bénéficié du soutien de la Communauté Economique Européenne. 14 pays y ont été représentés : Grande Bretagne, Pays Bas, Belgique, Danemark, Espagne, Italie, Portugal, République Fédérale d'Allemagne, Suède, Norvège, Finlande, Japon, Etats-Unis.