

# LA MECANIQUE DU CHAOS

par Charles RUHLA

Professeur émérite de l'Université  
Claude Bernard - Lyon.

La Science nous offre une représentation rationnelle du monde qui est particulièrement séduisante mais elle ne serait qu'un langage si cette représentation n'avait aucune valeur opérationnelle. Ce qui fait la valeur de la Science c'est d'être un instrument de prévision efficace qui nous donne un pouvoir sur la Nature. La validation d'une théorie nouvelle passe toujours par la réalisation d'une expérience nouvelle qui vérifie la théorie. Il en est ainsi par exemple de la mécanique céleste qui nous permet de prévoir, pour les quelques années à venir, le mouvement des objets du système solaire avec une très grande précision. Ce caractère opérationnel ne s'applique pas seulement aux objets naturels, comme les planètes, mais aussi à des objets artificiels, créés par les hommes, comme les satellites ou les sondes spatiales. Ainsi, la mécanique céleste classique apparaît-elle comme la meilleure expression du déterminisme triomphant tel que le définissait Pierre Simon de Laplace en 1814 :

« Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans une même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence ».

Ces idées laplaciennes ont porté toute la physique du 19<sup>ième</sup> siècle jusqu'à ce qu'intervienne Henri Poincaré, en 1889, montrant les limites pratiques du déterminisme en physique macroscopique et ouvrant ainsi la voie à la théorie du chaos. Le présent article a pour objectif de suivre l'évolution de la mécanique classique depuis ses origines jusqu'à l'an 2000 et de mon-

trer à cette occasion que son classicisme contenait en germe des richesses insoupçonnées qui nous apparaissent aujourd'hui inépuisables .

## LE DÉTERMINISME EN ACTION

Le déterminisme idéal s'illustre très bien par un problème de balistique cher aux élèves de terminale (figure 2) :

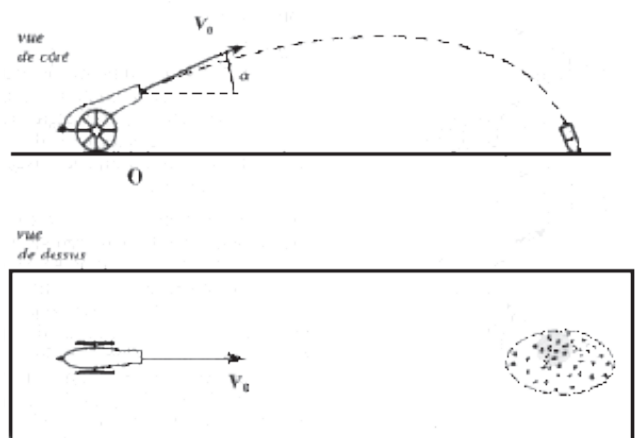


Figure 2 : Le problème de l'artilleur

vitesse initiale  $v_0$ . Après avoir décrit une trajectoire parabolique l'obus retombe sur le sol en un point I. L'application des lois de la mécanique donne alors la portée du canon sous la forme :

$$OI = (2 v_0^2 \sin a \cos a)/g$$

Si, comme cela est fréquent pour les problèmes de physique proposés au lycée, on donne pour les grandeurs physiques des valeurs rigoureusement exactes telles que  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $a = 45^\circ$ , on peut calculer la portée OI avec exactitude et l'on trouve ainsi  $OI = 4000 \text{ m}$ . Ce modeste exemple nous conduit à définir le déterminisme :

« On dit qu'il y a déterminisme au sens idéal si la connaissance exacte des conditions initiales et des lois d'interaction d'un système physique permet de prévoir son avenir avec exactitude ».

On remarquera que cela suppose que l'on ait des valeurs numériques exactes mais aussi que les lois d'interaction soient représentées par des

équations pouvant être résolues mathématiquement avec exactitude.

Le déterminisme pratique peut très bien lui aussi être introduit par la même expérience de balistique mais en tenant compte de toute la réalité du phénomène :

D'abord, l'expérience a lieu dans l'atmosphère et non pas dans le vide, et le frottement de l'obus sur l'air infléchit la trajectoire ; elle réduit la portée d'une valeur parfaitement calculable car on connaît bien les lois de la résistance de l'air.

Ensuite, le tir comporte un aspect aléatoire : les valeurs initiales  $v_0$  et  $\alpha$  ne sont définies qu'avec une limite de précision car la précision absolue n'existe pas. De même, l'air libre, même sans vent, est le siège de fluctuations de densité qui font varier aléatoirement sa résistance. Si l'on procède successivement à une suite de tirs avec le même canon, avec des obus tous issus d'une même série, et en choisissant toujours la même hausse  $\alpha$ , l'imprécision aléatoire sur la définition effective des conditions initiales entraîne que les obus n'atterrissent pas tous au point I, extrémité de la trajectoire idéale, mais se répartissent au hasard autour de I sur une surface que les artilleurs appellent ellipse de dispersion (figure 2). Les dimensions de l'ellipse de dispersion définissent la précision du tir. Ceci nous conduit à une définition pratique du déterminisme.

« On dit qu'il y a déterminisme au sens pratique si la connaissance précise des conditions initiales et des lois d'interaction d'un système physique permet de prévoir son avenir avec précision ».

La nature profonde du déterminisme peut être mieux comprise si l'on analyse la notion de précision. Revenant à la balistique on peut se demander quelle est la conséquence à l'arrivée d'un écart au départ de 1 ou 2 ou 3 minutes d'angle dans la visée horizontale. Pour une portée de 4000 m on trouve par un calcul trigonométrique élémentaire que l'écart à l'arrivée sera de 1,2 m, ou 2,4 m, ou 3,6 m. Ainsi, la croissance des écarts dans l'état final est proportionnelle à la croissance des écarts de l'état initial et cette croissance limitée permet en pratique le pointage. Ceci nous conduit à une définition améliorée du déterminisme :

« Un système physique est déterministe si une petite variation des conditions initiales n'entraîne par interaction qu'une petite variation proportionnelle des conditions finales ».

En revanche, il existe des systèmes mécaniques macroscopiques, pour lesquels la croissance des écarts dans les conditions finales est exponentielle et nous allons voir que dans ce cas, tout pointage devient impossible.

## LE BILLARD IMPOSSIBLE

Sur le plan horizontal d'un billard classique on a placé 7 butoirs cylindriques blancs numérotés de 1 à 7, et une boule noire. La disposition géométrique de ces différents éléments est bien apparente sur la figure 3 et suggère l'énoncé d'un joli problème :

« Est-il possible en un seul jet de lancer la boule

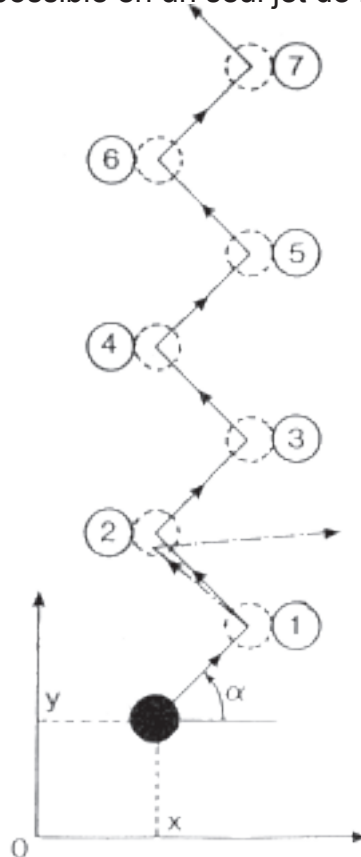


Figure 3 : Le billard impossible

noire de façon qu'elle atteigne le butoir numéroté 7 après avoir rebondi élastiquement et dans l'ordre sur les butoirs numérotés de 1 à 6 ? ».

Cet énoncé appelle deux questions complémentaires :

Y a-t-il une solution ? La réponse est oui ; si,

dans la géométrie de figure proposée, on lance la boule noire dans la direction définie par l'angle  $\alpha$ , la boule décrit une trajectoire régulière en dents de scie qui l'amène jusqu'au butoir 7 (figure 3).

Si cette solution existe, y a-t-il un joueur assez habile pour réussir ? La réponse est non car le pointage dans la bonne direction est d'une difficulté extrême. Sur la figure 3 on a représenté l'effet d'un écart initial de  $0,5^\circ$  par rapport à la valeur correcte  $\alpha$ . Invisible sur la figure avant le butoir 1, l'écart est multiplié par 9 après le premier rebondissement, puis encore par 9 après le deuxième rebondissement\*. L'écart par rapport à la trajectoire correcte passe donc de  $0,5^\circ$  à  $4,5^\circ$  puis à  $40,5^\circ$  ce qui entraîne l'échec car on n'atteint pas le butoir 3. Encore plus éloquent est le calcul des « fenêtres » de tir :

\* Ce facteur 9 a été calculé en utilisant une relation particulière des miroirs sphériques :

$$e' = e [1 + 2d / (R \cos j)]$$

Pour plus d'information, voir « La physique du hasard » page 158

- Pour atteindre 1 butoir la fenêtre est égale à :  $32^\circ$
- Pour atteindre 2 butoirs la fenêtre est égale à :  $3,6^\circ$
- Pour atteindre 3 butoirs la fenêtre est égale à :  $0,40^\circ$
- Pour atteindre 4 butoirs la fenêtre est égale à :  $0,044^\circ$
- Pour atteindre 5 butoirs la fenêtre est égale à :  $0,0049^\circ$
- Pour atteindre 6 butoirs la fenêtre est égale à :  $0,00054^\circ$
- Pour atteindre 7 butoirs la fenêtre est égale à :  $0,000060^\circ$  ( $0,22''$ )

Un joueur moyen peut atteindre deux butoirs ; un bon joueur peut atteindre trois butoirs ; un champion peut atteindre quatre butoirs et personne ne peut faire mieux. Un système sophistiqué de lancement mécanique pourrait dépasser les performances humaines mais on n'atteindrait jamais le butoir 7 qui exige une précision de pointage supérieure à celle des meilleurs instruments astronomiques. C'est le caractère multiplicatif des écarts à chaque rebond qui entraîne la difficulté extrême du pointage et rend impossible la prévi-

sion de la trajectoire de la boule.

« Un système physique macroscopique pour lequel une croissance lente de l'écart initial conduit à une croissance très rapide de l'écart final n'est pas déterministe en pratique parce que son avenir est imprévisible ».

Un tel système est donc déterministe au sens idéal, puisque l'on est capable de calculer la trajectoire idéale, mais indéterministe en fait en raison de la très grande sensibilité à la définition des conditions initiales. Nous allons voir maintenant sur un deuxième exemple comment cet indéterminisme pratique conduit à un mouvement désordonné qualifié de chaotique.

## LA BOUSSOLE AFFOLÉE

Une aiguille aimantée est placée dans un champ

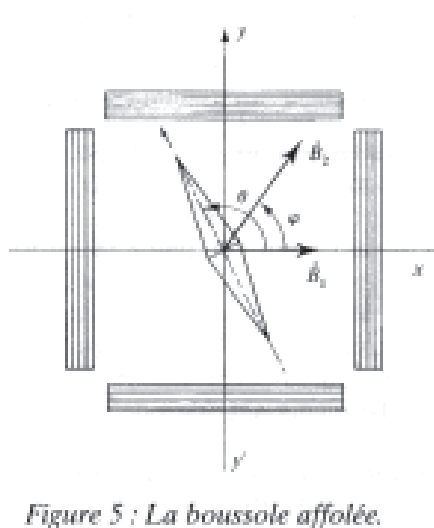


Figure 5 : La boussole affolée.

magnétique fixe  $B_1$  parallèle à la composante horizontale du champ magnétique terrestre (figure 4). Libérée sans vitesse initiale avec l'élongation  $q$ , elle oscille de façon régulière et ce mouvement est prévisible car nous sommes dans une situation déterministe. La théorie du phénomène, en négligeant les frottements qui sont très faibles, nous conduit à une équation différentielle :

$$q'' + (w_1)^2 \sin q = 0 \quad (1)$$

$$-w_1 = (M B_1 / J)^{1/2}$$

-M moment magnétique de l'aiguille aimantée

-J moment d'inertie de l'aiguille aimantée

Cette équation devient linéaire si l'on remplace  $\sin q$  par  $q$ , ce qui est légitime pour les petites amplitudes, et sa résolution devient alors très

simple. On obtient

$q = q_0 \cos w_1 t$  où  $q_0$  est l'élongation initiale de l'aiguille aimantée abandonnée sans vitesse initiale au temps  $t = 0$ .

On ajoute au champ fixe B1 un champ tournant B2 en plaçant autour de l'aiguille aimantée un ensemble de quatre bobines alimentées deux à deux par des courants sinusoïdaux en quadrature (figure 5). Ce champ tourne avec une vitesse angulaire  $w_0$  et sa phase est  $j = w_0 t$ .

Dès que l'on ajoute le champ B2, l'aiguille aimantée s'anime d'un mouvement désordonné et chaque fois que l'on recommence l'expérience ce mouvement est différent car le système est extrêmement sensible à la définition des conditions initiales et il est impossible de faire successivement deux mises en route identiques. Ce mouvement désordonné, baptisé chaotique, résulte de la concurrence permanente entre les effets des champs B1 et B2 sur l'aiguille aimantée qui tantôt suit l'un, tantôt suit l'autre. L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$q'' + Kq' + (w_1)^2 \cos q + (w_2)^2 \cos (q - w_0 t) = 0 \quad (2)$$

$$- w_1 = (M B_1/J)^{1/2}$$

$$- w_2 = (M B_2/J)^{1/2}$$

Le terme  $Kq'$  correspond à un frottement liquide qui peut être négligé si l'aiguille aimantée ne baigne pas dans un bain d'huile. Toutefois, même en supprimant ce terme de frottement, il nous reste une équation différentielle non linéaire pour laquelle il n'existe pas de solution générale exacte. Seule une intégration numérique permet d'obtenir une solution approchée par approximations successives. Encore faut-il préciser que la qualité de cette solution dépend fortement de la précision avec laquelle sont définies les conditions initiales et sont menés les calculs.

Comparons le tir au canon et l'affolement de la boussole :

Le tir au canon dépend de deux paramètres initiaux  $a$  et  $v_0$ , et donne lieu à une prévision déterministe.

Le mouvement de la boussole dépend de trois paramètres initiaux  $q_0$ ,  $q'_0$  et  $j_0$  ; il donne lieu à un mouvement désordonné imprévisible.

Nous avons maintenant en main tous les éléments pour définir le chaos :

« **Le chaos est le mouvement désordonné imprévisible d'un système physique macroscopique très sensible à la définition des conditions initiales, dépendant d'au moins trois paramètres et régi par une équation différentielle non linéaire** ».

## L'ESPACE DE PHASE

Notre première approche du chaos nous a fait réaliser la difficulté de trouver des solutions exactes ou même approchées à des équations non linéaires et ceci nous amène à la recherche d'une représentation qui nous permettrait d'accéder plus simplement à des solutions qualitatives. C'est le moment d'introduire l'espace de phase.

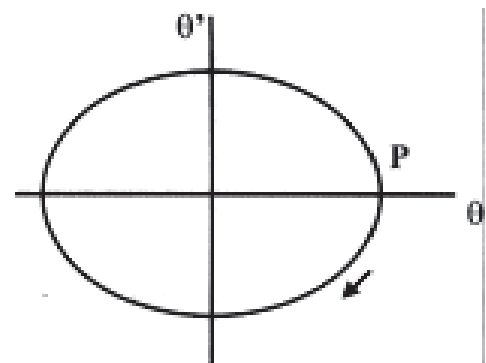


Figure 6 : l'oscillation d'une boussole normale représentée dans l'espace de phase.

Dans le cas simple de la boussole normale, l'espace de phase a deux dimensions  $q$  et  $q'$  ; L'état dynamique de l'aiguille aimantée à un instant donné est représenté par le point de coordonnées :

$$q = q_0 \cos w_1 t$$

$$q' = - w_1 q_0 \sin w_1 t$$

En fonction du temps ce point décrit une ellipse qui est la trajectoire de phase et cette trajectoire de phase contient toutes les informations sur le mouvement de l'aiguille aimantée dès qu'elle est abandonnée avec les conditions initiales  $q_0$  et  $q'_0$ . Par exemple, si l'aiguille est abandonnée avec une élongation  $q_0$  et une vitesse nulle  $q'_0 = 0$ , l'état initial sera représenté par le point P et le mouvement qui suit par le déplacement de ce

point P dans le sens de la flèche (figure 6).

Pour une élongation initiale plus grande, la trajectoire de phase est une ellipse plus grande et l'on obtient ainsi une infinité de trajectoires de phase qui se divisent en deux groupes :

Pour les mouvements oscillatoires de l'aiguille, la trajectoire de phase est toujours une ellipse fermée sur elle-même.

Pour les mouvements de rotation complète de l'aiguille, qui se produisent si  $q_0$  est grand, la trajectoire de phase est ouverte.

Entre les deux groupes se situe une courbe limite : la séparatrice (figure 7).

Enfin il faut souligner que les trajectoires de phase ne se coupent jamais. Si tel était le cas, le point d'intersection correspondrait à un état initial  $q_0$  et  $q'_0$  pouvant conduire à deux avenir distincts pour le système ce qui est en contradiction avec le déterminisme au sens idéal du terme.



Avec l'introduction du champ tournant B2, l'état dynamique du système dépend maintenant de trois paramètres et il faut pour le décrire un espace de phase à trois dimensions  $q$ ,  $q'$  et  $j$ . La trajectoire de phase prend alors une forme très contournée dont l'aspect est difficile à appréhender. C'est là que l'imagination féconde de Henri Poincaré nous conduit à une représentation plus simple et plus lisible. Puisque  $j$  est un angle, sa

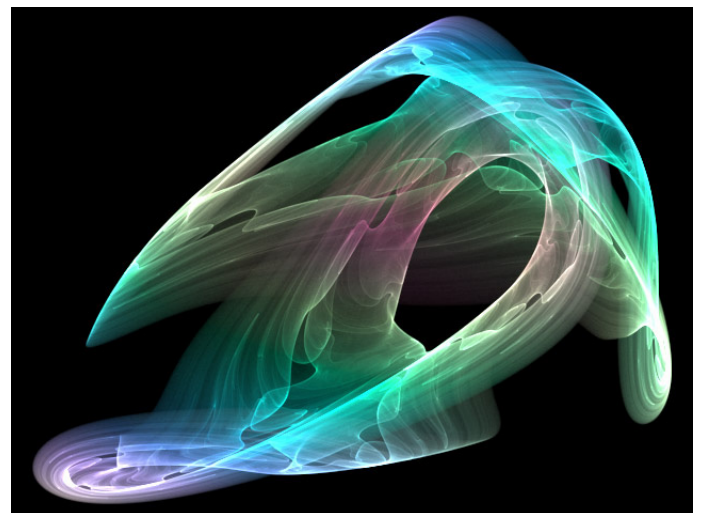
périodicité est  $2\pi$  et il est inutile de le faire croître jusqu'à l'infini. Il suffit de repérer la trajectoire en la coupant par des plans verticaux de coordonnées  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$  et de projeter les points d'intersection P1, P2, P3... ainsi obtenus sur le plan  $q, q'$ . On est ramené alors à une représentation à deux dimensions baptisée coupe de Poincaré (figure 7). Sur cette coupe apparaissent très nettement les deux régimes dynamiques du système :

Des régions où les points se distribuent sur des courbes fermées régulières qui correspondent aux situations où l'aiguille est en résonance avec le champ fixe B1 ou le champ tournant B2.

Des régions où les points se distribuent de façon tout à fait désordonnée qui correspondent aux situations où l'aiguille est animée d'un mouvement chaotique.

Cette coupe de Poincaré a été obtenue par calcul sur ordinateur à partir de l'équation différentielle (2) sans le terme de frottement  $Kq'$ .

Ainsi, bien que l'on ne puisse pas résoudre exactement et complètement cette équation différentielle, l'approche de la coupe de Poincaré nous permet de trouver avec précision les conditions initiales  $q_0$  et  $q'_0$  à réaliser pour obtenir un mouvement déterministe ou un mouvement chaotique.



L'introduction dans l'équation (2) du terme de frottement  $Kq'$  signifie que le système est dissipatif, ce qui veut dire que de l'énergie mécanique est dissipée sous forme de chaleur. L'aiguille aimantée ne s'immobilise pas pour autant car son mouvement chaotique est entretenu par le champ tournant qui injecte en permanence de

l'énergie dans le système. On constate alors que la coupe de Poincaré se simplifie encore pour donner un ensemble de points formant une figure très étonnante, de structure feuilletée, que l'on a baptisée « attracteur étrange » ; cette structure feuilletée se maintient quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe, ce qui veut dire que l'attracteur étrange a une structure fractale (figure 8)\*.

« L'attracteur étrange est une région limitée de la coupe de Poincaré sur laquelle viennent s'accumuler sans jamais se couper les trajectoires de phase d'un système dissipatif entretenu, ayant au moins trois degrés de liberté dans l'espace de phase, une grande sensibilité aux conditions initiales, et un mouvement chaotique ».

L'attracteur étrange représente l'ordre dans le chaos.

\* On choisit les variables de l'espace de phase qui donnent la représentation la plus simple. Dans la figure 8 ces variables sont  $q'$  et  $q''$ .

L'ordinateur reçoit de ces bobines les signaux  $q'$  et  $q''$  et, en plus, un signal pilote issu de l'oscillateur de fréquence  $\omega_0 / 2\pi$ . Les signaux sont traités par un programme approprié calculant directement une coupe de Poincaré dans l'espace de phase  $q'$ ,  $q''$  et l'on voit se construire l'attracteur étrange en temps réel sur l'écran (figure 8).

Cette expérience est en elle-même un petit exploit : la moindre imperfection dans la qualité du pivot suffirait à brouiller complètement l'image dans l'espace de phase. Elle valide définitivement cette notion d'ordre dans le chaos représentée par l'attracteur étrange.

## DE LA THÉORIE A L'EXPÉRIENCE

Tous les résultats que nous venons de présenter sont issus de calculs numériques sur ordinateur à partir de l'équation (2). Cette équation elle-même ne peut être mise en doute puisqu'elle repose sur les lois éprouvées de l'électromagnétisme. L'existence de l'attracteur étrange, issue d'un calcul théorique, est donc certaine. Mais la preuve de son existence serait encore meilleure si l'on pouvait extraire l'attracteur étrange directement de l'expérience. C'est ce qui a été réalisé en 1981 par un physicien français, Vincent Cro-

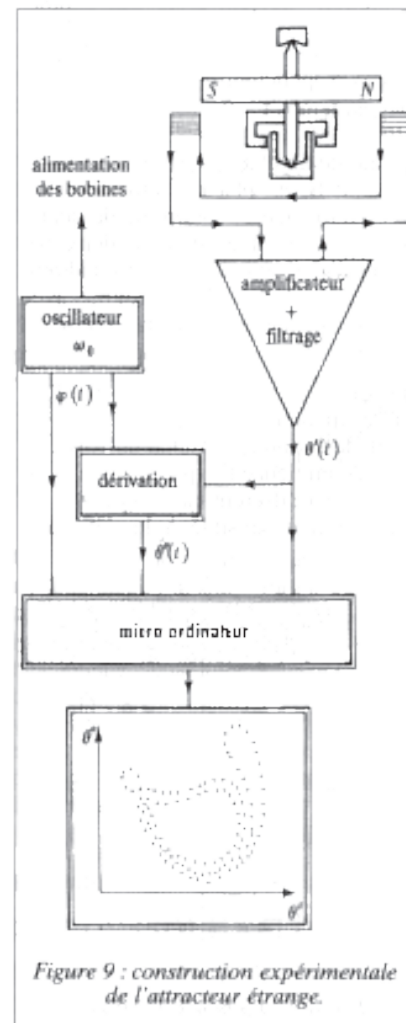


Figure 9 : construction expérimentale de l'attracteur étrange.

quette.

Cette expérience de recherche (figure 9) est calquée sur l'expérience de démonstration (figure 5) mais tous les éléments sont particulièrement soignés pour pouvoir réaliser des mesures rigoureuses et fiables. Le barreau aimanté tourne sur un axe défini par deux pointeaux ; on lui adjoint deux palettes symétriques plongeant dans un bain d'huile afin de fournir un frottement liquide. Pour simplifier le schéma on n'a pas représenté les bobines créant le champ fixe et le champ tournant mais, en revanche, on a représenté les deux bobines détectrices qui, par induction, donnent un courant proportionnel à  $q'$ .

Avec cette première partie nous venons donc d'introduire la physique du chaos par la voie qui nous a paru pédagogiquement la plus simple. Cette voie pédagogique n'est pas la voie historique : la physique du chaos a été créée par Henri Poincaré en utilisant une voie bien plus difficile, celle de la mécanique céleste. C'est une belle histoire, qui mérite d'être racontée, et qui se poursuit aujourd'hui par la découverte du chaos dans le système solaire.

## BRÈVE HISTOIRE DES SYSTÈMES DU MONDE

Depuis la plus haute antiquité les hommes observent les mouvements des astres dans le ciel et les peuples méditerranéens sont particulièrement bien servis par un ciel très pur. Ils ne manquent pas de se rendre compte, de visu, que le Soleil, la Lune et les étoiles tournent autour de la Terre et tout serait pour le mieux dans le meilleur des systèmes du monde possibles s'il n'y avait pas des astres errants au mouvement tantôt direct, tantôt rétrograde, qu'ils ont baptisés planètes. Après plusieurs tentatives, émerge chez les Grecs un système cohérent proposé par Ptolémée en 140 après J.C.

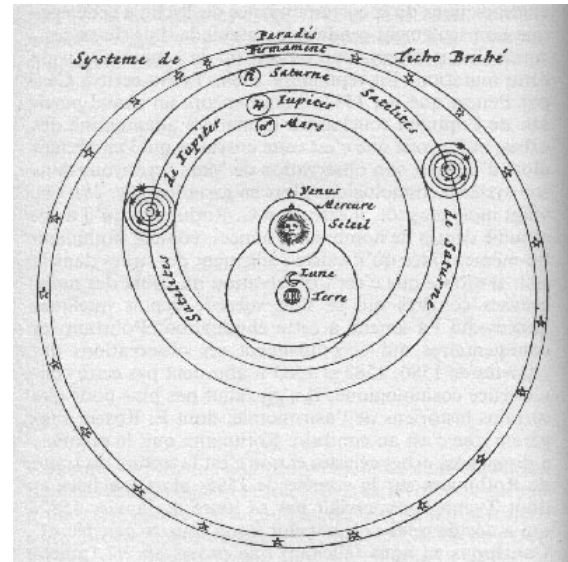
**Claude Ptolémée (90-168)** place la Terre au centre du monde, ce qui correspond parfaitement à l'observation directe. Autour d'elle tournent, d'un mouvement circulaire uniforme, le Soleil, la Lune, et la voûte céleste. Quant aux planètes, elles tournent également autour de la Terre, mais sur des trajectoires plus complexes, les épicycles, combinaison de deux cercles, et l'on explique ainsi que leur mouvement puisse être rétrograde à certaines périodes. Ce système permet des prévisions des phénomènes célestes tels que les éclipses avec une fiabilité assez bonne compte tenu de la précision des mesures de l'époque.

Le mouvement circulaire uniforme est la base du système. Il est même érigé en symbole de régularité, d'harmonie, et d'immutabilité.

**Nicolas Copernic (1473-1543)** propose en 1543, un système plus simple. Le Soleil est au centre du monde tandis qu'autour de lui, la Terre et les autres planètes tournent d'un mouvement circulaire uniforme. Il n'y a que la Lune qui tourne autour de la Terre. Les prévisions qu'il permet sont aussi bonnes mais pas vraiment meilleures que celles données par le système de Ptolémée. L'argument de la simplicité est en faveur de Copernic mais c'est un argument théorique ; l'expérience n'a pas encore tranché.

**Le dogme de l'immutabilité du mouvement circulaire uniforme demeure inchangé.**

**Tycho Brahé (154-1601)** propose en 1577 un système mixte. La Terre est au centre du monde;



autour d'elle tournent le Soleil et la Lune tandis que les planètes tournent autour du Soleil. Tous ces mouvements sont circulaires uniformes et le système de Tycho Brahé est cinématiquement équivalent au système de Copernic. Il semble mieux conforme à l'observation de visu et, en bon observateur, Tycho Brahé préfère s'en tenir à l'immobilité de la Terre tant que l'expérience ne tranche pas en faveur de Copernic.

**Le dogme de l'immutabilité du mouvement circulaire uniforme demeure inchangé.**

**Johanes Képler (1571-1630)** précise en 1609 le système de Copernic. Utilisant les résultats des observations de Tycho Brahé, qui sont d'une précision remarquable, il crée un nouveau système du monde qui sert toujours de base aux calculs d'aujourd'hui. Les cercles sont remplacés par des ellipses ; les mouvements des planètes et des satellites sont caractérisés par la loi des aires ; les périodes de révolution des planètes sont reliées aux dimensions de l'orbite. Avec ces trois lois de Képler les prévisions des éphémérides astronomiques sont bien améliorées.

**L'harmonie du mouvement circulaire uniforme est abandonnée mais le dogme de l'immutabilité est conservé.**

**Isaac Newton (1643-1727)** introduit en 1687 une cause unique, la gravitation universelle. La force attractive exercée par le Soleil sur les planètes explique les orbites et les mouvements découverts par Képler. Cela montre en particulier que le système de Tycho Brahé n'est pas dynamiquement équivalent au système de Copernic et l'on élimine ainsi définitivement toute idée de

placer la Terre au centre du monde. Mais, cette synthèse remarquable contient en elle-même une difficulté : puisque la gravitation est universelle, les planètes s'attirent aussi entre elles et cela doit créer des perturbations. Newton lui-même a bien conscience de cette difficulté, en particulier quand il essaie de calculer avec précision le mouvement de la Lune.

### **Peut-on maintenir encore le dogme de l'immutabilité ?**

**Pierre Simon de Laplace (1749-1827)** est le véritable fondateur de la mécanique céleste. En 1784, il lance la théorie des perturbations, méthode de développement en série qui permet de calculer les orbites réelles des planètes par approximations successives à partir des orbites képlériennes. Il montre par exemple que les orbites de Jupiter et de Saturne se rapprochent puis s'éloignent régulièrement avec une période de 800 ans. Le système solaire n'est donc plus tout à fait immuable mais il paraît en équilibre stable.

### **L'immutabilité demeure, sous une forme plus élaborée : la stabilité.**

### **LE CONCOURS DE 1889**

Au 19ème siècle, les succès de la mécanique céleste de Laplace incitent à l'optimisme. En 1858, Johan Dirichlet (1805-1859) confie à l'un de ses élèves qu'il a trouvé une méthode démontrant la stabilité du système solaire mais il meurt avant d'avoir publié ses résultats. L'université de Stockholm organise en 1889 un concours sur la question et le sujet est proposé par Weierstrass :

« Pour un système quelconque de points massifs s'attirant mutuellement selon les lois de Newton, en supposant qu'aucun de ces points ne subisse de collisions, donner en fonction du temps les coordonnées des points individuels sous la forme d'une série uniformément convergente dont les termes s'expriment par des fonctions connues ».

A cet énoncé, Weierstrass rajoute un commentaire explicatif :

« Ce problème, dont la résolution élargirait considérablement notre compréhension du système solaire, devrait pouvoir être résolu à l'aide des méthodes analytiques actuellement disponibles.

Malheureusement nous ignorons tout de la méthode de Dirichlet. Nous pouvons cependant supposer, avec une certitude presque totale, que cette méthode ne reposait pas sur des calculs longs et compliqués, mais sur le développement d'une idée simple et fondamentale que l'on peut raisonnablement espérer retrouver par une recherche pénétrante et persévérante ».

Ironie du cheminement de la Science ! Un jeune mathématicien français, Henri Poincaré, démontre que le problème est mal posé et qu'il n'a pas de solution. Le jury, très « fair play », estime que cette contribution est si originale et si importante qu'il est déclaré vainqueur du concours.

### **POINCARÉ ET LE CHAOS**

**Henri Poincaré (1854-1912)**, étudiant brillant, puis chercheur encore plus brillant, est, dès 1881, professeur de mathématiques à l'Université de Paris. Après son succès au concours de 1889 il publie, l'année suivante, le texte de sa contribution, largement revue et augmentée, dans la revue *Acta Mathematica*, sous le titre : « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique ». Par la suite, il développera encore davantage ses idées dans son cours à l'École Polytechnique qui sera publié de 1892 à 1899 sous le titre « Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste ».

Comme il réalise très bien la complexité du problème posé par Weierstrass, il préfère se limiter au mouvement de trois corps célestes tels que l'ensemble Soleil, Terre, Lune et son étude progresse par étapes :

1) Les équations du problème à trois corps sont non linéaires et non intégrables. Les solutions sous forme de série ne peuvent être que particulières et inutilisables pour les prévisions à long terme.

2) Il vaut mieux chercher des solutions qualitatives par une étude géométrique dans l'espace de phase, espace conventionnel à 6 dimensions ( $x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt$ ). Comme il n'est pas très facile d'y voir à 6 dimensions, on procède à des coupes ; ce sont les fameuses coupes de Poincaré.

3) Poincaré découvre ainsi qu'il y a, pour l'es-



sentiel, et suivant les conditions initiales, deux types de solutions : les solutions périodiques et les solutions chaotiques.

Ces idées géométriques qualitatives sont remarquables mais nécessairement limitées car Poincaré ne dispose à l'époque que d'un crayon et d'un papier pour dessiner. Seule son extraordinaire aptitude à l'abstraction lui a permis d'imaginer la géométrie du problème et de poser les bases de la théorie du chaos. C'est longtemps après sa disparition, vers 1970, que l'arrivée de l'ordinateur a permis de faire progresser cette théorie du chaos en délimitant de façon quantitative très précise les zones de mouvement périodique et les zones de mouvement chaotique.

L'ordinateur permet aussi de calculer par intégration numérique le début d'une trajectoire chaotique. Sur la figure 10, on a représenté le mouvement pendant les premiers jours d'une sonde spatiale arrivant à proximité d'un système de deux étoiles de même masse ; on voit que la trajectoire est particulièrement désordonnée et l'on conçoit bien que l'avenir de cette sonde est imprévisible. C'est un bel exemple du problème à trois corps restreint pour lequel la masse du troisième corps est très faible devant les masses

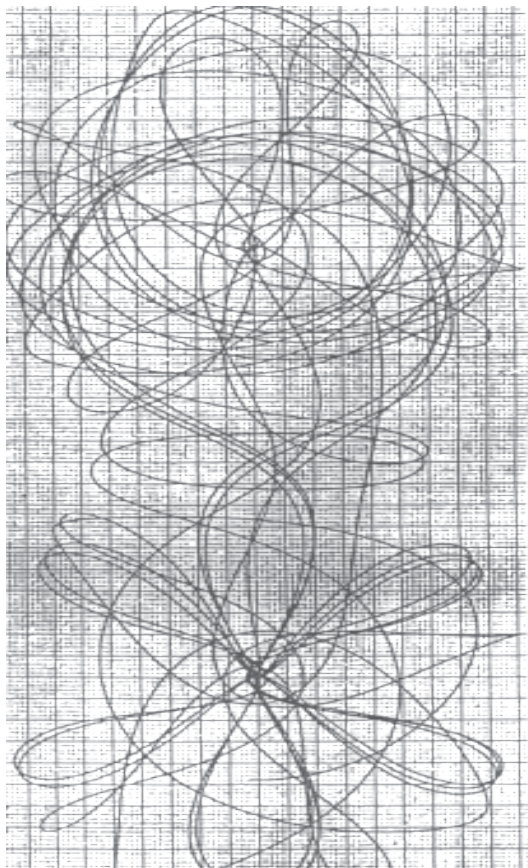


Figure 10 : trajectoire chaotique d'une sonde spatiale dans un système d'étoiles double.

des deux autres.

**Le dogme d'immuabilité doit être abandonné et cela nous incite à chercher des mouvements chaotiques dans le système solaire.**

## HYPERION, UN SATELLITE TRÈS AGITÉ

Autour de la planète Saturne, très célèbre par ses anneaux, on a identifié à ce jour 18 satellites parmi lesquels nous allons nous intéresser à Titan (n°15) et à Hypérion (n°16). Voyons d'abord les données astronomiques :

Saturne : Masse 5,68.1024 kg

Forme Sphère

Diamètre 120600 km

Titan : Masse 1,37.1023 kg

Forme Sphère

Diamètre 5140 km

Période 15,94 jours

Distance au centre de Saturne 1222000 km

Hypérion : Masse 1,77.1019 kg

Forme Cacahouète

Dimensions 410 x 260 x 220 km Période 21,28 jours

Distance au centre de Saturne 1481000 km

Les orbites des autres satellites sont suffisamment éloignées des satellites 15 et 16 pour que l'on puisse isoler le système Saturne, Titan, Hypérion ; on se trouve alors en présence d'une illustration typique du problème à trois corps restreint car la masse d'Hypérion est très faible par rapport à celles de Saturne et de Titan et l'on peut se demander si ce système est le siège d'un mouvement chaotique. La forme allongée et dissymétrique d'Hypérion suggère a priori de chercher des variations possibles de la rotation propre du satellite, c'est à dire d'étudier la relation entre l'orientation de l'axe de rotation et la vitesse angulaire correspondante. Le calcul a été fait par l'équipe californienne de Wisdom, Peale et Mignard en 1983 (figure 11). Le résultat fait apparaître une coupe de Poincaré tout à fait typique, avec des zones blanches constituant des îlots de stabilité et des zones de points répartis au hasard qui correspondent à un mouvement chaotique. Ainsi, l'existence des pirouettes d'Hypérion paraît possible et il reste alors à prouver qu'elles existent réellement par l'observation astronomique.

La recherche d'une rotation chaotique est simple dans son principe :

Si un satellite sphérique tourne régulièrement sur lui-même on observera au télescope un point lumineux d'éclat constant.

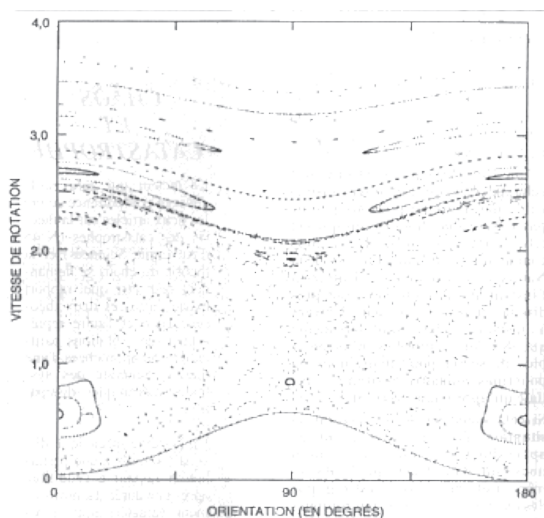


Figure 11 : coupe de Poincaré dans l'espace de phase du mouvement de rotation d'Hypérioron.

Si un satellite allongé tourne régulièrement sur lui-même autour d'un petit axe d'orientation fixe, on observera au télescope un point lumineux dont l'éclat varie périodiquement.

Si un satellite allongé et dissymétrique tourne irrégulièrement sur lui-même autour d'un axe d'orientation variable, on observera au télescope un point lumineux dont l'éclat varie aléatoirement.

Simple dans son principe, la mesure est délicate en raison de la faible luminosité d'Hypérioron et de

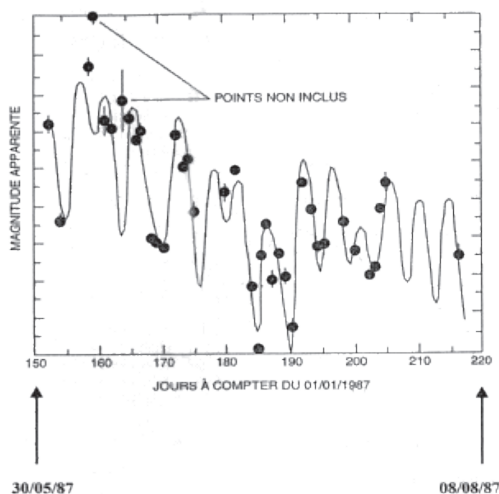


Figure 12 : variations aléatoires observées dans la luminosité d'Hypérioron.

la forte luminosité de la planète Saturne, toute proche. Le défi a été relevé par Klavetter qui a

réalisé 53 nuits d'observation entre le 31 mai et le 5 août 1987 à l'observatoire Mac Graw Hill. Sur ces 53 nuits, 37 lui ont apporté des données utilisables (figure 12). Les points expérimentaux apparaissent dispersés de façon aléatoire ; aucune courbe périodique susceptible de correspondre à des périodes de rotation uniforme allant de 1 heure à 7 semaines ne concorde de manière satisfaisante avec l'ensemble de ces points ; seule, la courbe théorique d'un mouvement chaotique donne un accord convenable. Ainsi, la rotation désordonnée d'Hypérioron apparaît comme le premier exemple identifié de l'existence du chaos dans le système solaire.

Ces calculs d'astronomie sur des objets lointains trouvent leur application dans le domaine spatial. Un satellite de télécommunication doit toujours tourner d'un mouvement régulier autour d'un axe fixe pour émettre toujours dans la même direction. Il ne faut surtout pas qu'il entre dans un régime de pirouettes chaotiques car il faudrait consommer beaucoup de carburant pour le remettre dans le droit chemin. La théorie du chaos permet de définir les conditions d'une rotation stable, et l'on s'efforce de maintenir le satellite dans ces conditions à l'aide des petites fusées annexes sans consommer trop de carburant.

## L'AVENIR DE LA TERRE

Il nous reste à chercher si le mouvement à long terme de la Terre est périodique ou chaotique. Répondre à la question posée dans l'esprit de Laplace est absolument inextricable mais, heureusement, il n'est pas nécessaire de connaître la position précise de la Terre à un instant donné dans un futur lointain. Il suffit de savoir comment évoluent l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite terrestre, au cours du temps, pendant 1, 10, 100 ou même 1000 millions d'années. La recherche se fait par intégration numérique des équations de la mécanique céleste avec un pas d'intégration suffisamment grand pour effacer les variations rapides et limiter la durée des calculs. Trois équipes de recherche travaillent sur le problème depuis 1989. Ce sont les équipes de :

- Laskar : France (Bureau des longitudes)
- Tremaine : Canada (Toronto)
- Wisdom : USA (Californie)

Chaque équipe a ses méthodes (algorithmes,

pas d'intégration...) mais leurs résultats sont concordants dans les plages de temps qui leur sont communes, ce qui donne assez confiance dans la méthode utilisée. C'est l'équipe californienne qui a poussé l'extrapolation au plus loin en calculant l'avenir jusqu'à 1 milliard d'années. Pour présenter ses résultats, Wisdom a réalisé en 1993 une vidéo présentant l'évolution des orbites planétaires en accéléré (1 seconde = 60000 ans). On constate alors que toutes les orbites planétaires s'agitent. Certaines, comme celle de la Terre, sont assez sages ; d'autres, comme celle de Mars, s'agitent au contraire frénétiquement. En dépit de ce chahut, les orbites ne se coupent jamais, ce qui élimine les risques de collision, et c'est pourquoi Wisdom s'autorise à proposer deux conclusions :

Si, après avoir vu ce film, on vous demandait de démontrer la stabilité du système solaire, vous diriez immédiatement : « Je ne crois pas que le système solaire soit stable ».

**Le chaos n'est pas nécessairement synonyme de catastrophe.**

## CONCLUSION

Cet article commençait par une célèbre citation de Laplace datant de 1814 ; il se terminera par une citation de Poincaré qui, elle, date de 1908. On pourra ainsi mesurer le chemin parcouru en un siècle :

« Une cause très petite, et qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la Nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire la situation de ce même Univers à l'instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme

sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit ».

**Charles RUHLA**, Professeur émérite à l'Université Claude Bernard

## BIBLIOGRAPHIE

- Pierre-Gilles de GENNES : « L'ordre du Chaos », Pour la Science 1977 à 1989

Diffusion BELIN 8 rue Férou 75006 PARIS

- C. MARCHAL : « La physique est-elle déterministe ? », Revue du Palais de la Découverte N° 128, mai 1985

- Ivars PETERSON : « Le chaos dans le système solaire », Pour la Science 1995

Diffusion BELIN 8 rue Férou 75006 PARIS

- Charles RUHLA : « La physique du hasard », HACHETTE – CNRS Paris 1989

\*\*\*\*\*

## CHAOS ET CATASTROPHE

Le lecteur qui aura eu le courage et la patience de lire les deux articles sur la théorie des catastrophes (N°45 d'Auvergne Sciences) et la théorie du chaos se demandera peut être quel rapport existe entre ces deux théories; l'une et l'autre représentent des solutions particulières et approchées d'une théorie générale des systèmes mécaniques dissipatifs.

Un système mécanique dissipatif soumis à une perturbation revient à l'équilibre après une durée d'amortissement caractéristique appelée temps de relaxation:

- Pour le lac de montagne, le temps de relaxation se mesure en heures.
- Pour l'aiguille aimantée, le temps de relaxation se mesure en minutes.

Tout dépend alors de la vitesse de variation du phénomène exciteur extérieur: - Pour le lac de montagne, il faut au moins un siècle pour avoir une variation significative de son profil et cette durée est très supérieure au temps de relaxation du système. L'analyse de ce phénomène entre dans le cadre de la théorie des catastrophes.

- Pour l'aiguille aimantée, la période du champ tournant- exciter est de l'ordre de la seconde, et cette durée est très inférieure au temps de relaxation du système. L'analyse de ce phénomène entre dans le cadre de la théorie du chaos.

En dehors de ces deux théories particulières il reste à construire une théorie générale des systèmes mécaniques dissipatifs; mais ceci est une autre histoire !



Hypérior est un satellite de Saturne découvert en 1848 Hypérior est unique par sa forme très irrégulière, son orbite très excentrique, et sa proximité avec une autre grande lune, Titan. Ces facteurs limitent les possibilités d'une rotation stable. La résonance orbitale 3:4 entre Titan et Hypérior a probablement également un impact sur la rotation chaotique du satellite. C'est en partie grâce au grand bras de levier fourni par sa forme irrégulière que les perturbations gravitationnelles dues surtout à Titan réussissent à faire basculer de façon imprévisible son axe de rotation.